Faculté des Sciences

MATHEMATIQUES GENERALES II, F. Bastin

« MATH1009-1 »

EXERCICES DE BASE

Bachelier (Bloc 1) en Chimie et Bachelier (Bloc 2) en Géologie (Q2)

Année académique 2025-2026

Jacqueline CRASBORN

Introduction

Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du cours de MATHEMATIQUE Math1009 de l'année académique 2025-2026. Il présente aussi la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière de ce cours s'adressant aux futurs bacheliers de premier bloc en chimie ainsi qu'aux futurs bacheliers de deuxième bloc en géologie.

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener, au plus vite, les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants. Je remercie également tous les assistants avec lesquels je travaille, tout spécialement Christine Amory et Christophe Dozot, pour leurs suggestions constructives et leur participation à l'élaboration de ce fascicule.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2025 - 2026

Informations relatives aux répétitions

Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion ...),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée ...) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? ...) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation ...) ;

4) **l’autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d’idées par l’utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicules intitulés “‘Bases” et “Exercices de base” ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d’aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,
   — dans l’organisation et la planification de son travail ;

5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l’assistant lors de la répétition

Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions habituellement non vues dans l’enseignement secondaire ou qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l’assistant résout 1 ou 2 exercices “modèle” pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l’assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S’il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l’assistant qui l’aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus au plus tard pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d’achever à domicile. Dans ce cas, s’ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors d’une séance de remédiation ou envoyer un courriel à l’un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions se trouvent en fin de ce fascicule.

Table des matières des répétitions pour 2025-2026

1. Rappels et calcul matriciel (1).
2. Calcul matriciel (2).
3. Calcul matriciel (3).
4. Fonctions de plusieurs variables (1).
5. Fonctions de plusieurs variables(2).
6. Révisions en vue de l’interrogation (1).
7. Révisions en vue de l’interrogation (2).
8. Fonctions de plusieurs variables (3).
9. Correction de l’interrogation.
10. Fonctions de plusieurs variables (4).
11. Fonctions de plusieurs variables (5).
12. Approximations polynomiales.
13. Développement en séries de puissances.

14. Mathématiques appliquées.
15. Révisions en vue de l'examen.

Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.

L'équipe des assistants
Année académique 2025 - 2026

AVERTISSEMENT

Les listes d'exercices résolus présentées dans ce fascicule sont celles des années académiques 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005. Elles ont été modifiées en fonction de la nouvelle version du cours de Mathématique de F. Bastin. Les listes des années suivantes se trouvent sur la page web relative au cours.

Les exercices des répétitions du cours Mathématique Math1009 pour l'année académique 2025-2026 se trouvent au chapitre 1. Ceux des années 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005 se trouvent dans les chapitres 2 à 4 inclus. Les solutions des exercices des répétitions se trouvent au chapitre 5.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2025 - 2026

Chapitre 1

Listes d'exercices

Liste 1 : rappels et calcul matriciel

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Nombres complexes et résolution d'équations

Bien connaître la matière de Math2007 : à réviser si nécessaire.

II. Matrices et opérations

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(2-3), II. 1(2-7) et 4(a) seront résolus par l'assistant.

I. Nombres complexes et résolution d'équations

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous.
$$z_1 = \frac{i+1}{i-1}, \qquad z_2 = \cos(2) + i\sin(2), \qquad z_3 = \frac{(i+2)^3}{2-i}.$$

2. Résoudre les équations suivantes

$$(1)\ z^2+9=0 \qquad (2)\ z^3=1 \qquad (3)\ z^2+z+1=0.$$

II. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ 3/i & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1/(i+1) \\ -2i & i/2 \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij}=1$, $\forall i,j$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C=AB-BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C}+C$.

3. On donne la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2-2A+3\,\mathbb{1}=0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ (a,b\in\mathbb{C})$$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Déterminant et matrice inverse

1. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
2. Citer les propriétés liées aux déterminants.
3. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
4. Quelle est la forme de cette matrice ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(A - C - E) et 2(B - C) ainsi que II. (C - D) seront résolus par l'assistant.

I. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix} \ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

II. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liste 3 : calcul matriciel (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Diagonalisation et matrices stochastiques

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
6. Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
7. Qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(C) et II. 1 seront résolus par l'assistant.

I. Diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

3. Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?

II. Divers

1. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

   Sachant cela,
   (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
   (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

3. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type
   $$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   — Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
   — Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
   — Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice
   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   est aussi une matrice qui représente une rotation.

4. Vrai ou faux (Justifier)
   (a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) La matrice $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ est inversible.
   (c) Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.
   (d) Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.
   (e) Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5 \det A$.
   (f) Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors $\det B = 5 \det A$.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

II. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées (x_0, y_0) d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Préambule

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi, par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(g) - 2(b) ainsi que II. 2(h) - 5(c) - 8 et 10 seront résolus par l'assistant.

I. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{2x-y}, \quad h(x,y) = \arccos(xy).$$

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si
   a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
   c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci.
   a) Quelle est la nature de la surface quadrique d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$?
   b) Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2-4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ?
4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b) x^2 + y^2 = 4.$$

II. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions f, g et h par

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \text{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-x/y}.$$

   a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

4. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.
   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

5. On donne les fonctions f et g respectivement par

$$f(x,y) = \arcsin(y/x) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x + y^2 + 1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\,(1/t, t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

6. On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
   b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)),\ (x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

7. On considère la fonction $f_r(x,y) = x^r e^{-y/x},\ r$ étant un réel.
   a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
   b) Déterminer le réel r tel que $D_x f_r(x,y) = yD_y^2 f_r(x,y) + D_y f_r(x,y),\ (x,y) \in B$.
8. On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - (a^2/b^2)D_y^2 f = 0$.
9. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :
   a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
   b) $T(x,y) = \arctan(y/x)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
   Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\pi/4$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.
10. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \text{arcos}(1-2xy).$$

   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
   (c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) - yD_y f(x,y)$$

11. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \ln(x^2-y^2) - \ln(y).$$

   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
   (c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

II. Description d'ensembles

Revoir les exemples du cours.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(a) - 4 et 5(a) ainsi que II. 1(a) - 4(a) et 6(A) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
   b) Même question pour g, fonction continûment dérivable sur$]0,1[\times]\ln(\pi/3), +\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arcos(y)))$.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\pi/2, \pi/6[\times]0,+\infty[\times]0,10/9[$.
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), 1/\sqrt{t+1}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en 1/3 ?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\pi/6, \pi/3[\times]\sqrt{2}, +\infty[\times]0,3[$.

3. Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_1 f)(2,7) = 6$ et $(D_2 f)(2,7) = -8$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 3, que vaut (DF)(3) ?

4. Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en$(1,0)$ si

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

   et $(D_u f)(2,3) = -1$ et $(D_v f)(2,3) = 10$, calculer $(D_s F)(1,0)$ et $(D_t F)(1,0)$.

5. (a) Soient
$$f \in C_1(]0,1[\times]-\infty,0[) \quad \text{et} \quad F(t) = f\left(\ln\left(\frac{t-1}{2}\right), t^2+t-6\right).$$
Où la fonction F est-elle dérivable ?
Quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f ?
(b) Même question pour
$$f \in C_1(]0,+\infty[\times]0,+\infty[) \quad \text{et} \quad F(x) = f(e^{-x}-1, \ln(5-x^2)).$$

6. On donne la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ définie et 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ ($r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$) et on considère $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
Montrer que $\quad (D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \dfrac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$

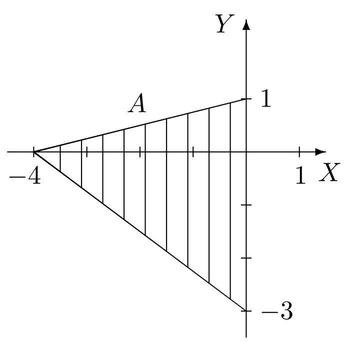
Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

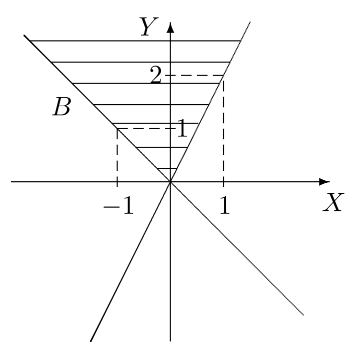
II. Représentation d'ensembles

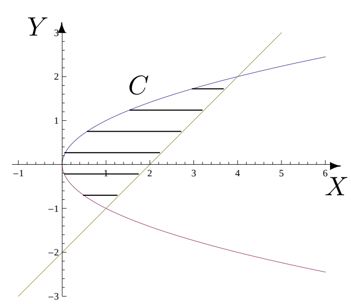
1. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0,1]\}$

2. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.

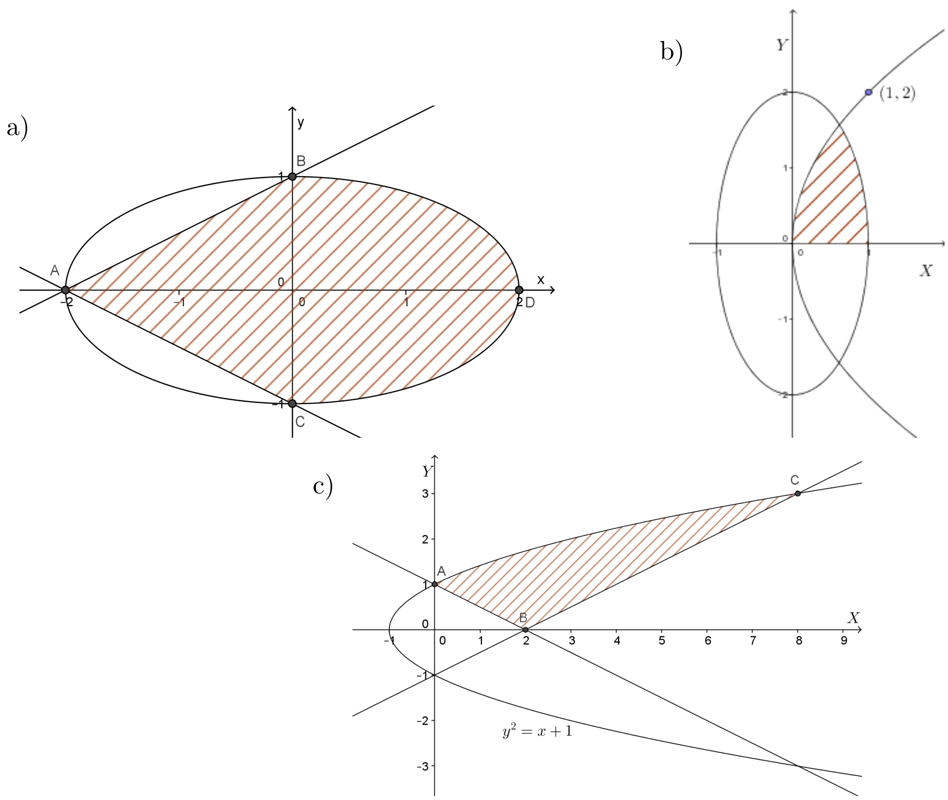






3. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x-2 \leq y \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 4\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 1/x \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$
Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents.

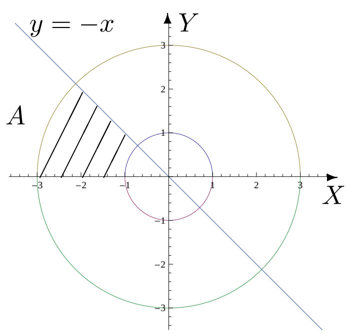
4. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

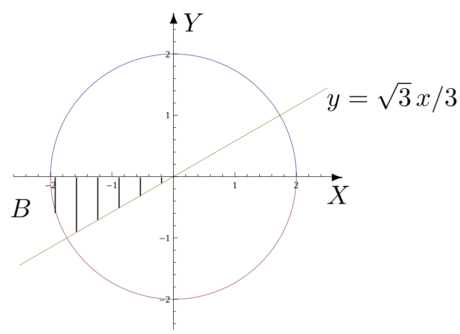


5. On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$

6. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.





7. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

Liste 6 : révisions en vue de l'interrogation du 31 mars 2026

Liste à établir en fonction de la matière prévue pour l'interrogation

Liste 7 : révisions en vue de l'interrogation du 31 mars 2026

Liste à établir en fonction de la matière prévue pour l'interrogation

Liste 8 : fonctions de plusieurs variables (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on « permutation de l'ordre d'intégration » dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du résultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

II. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(a), II. 2(b) et 3(b) seront résolus par l'assistant.

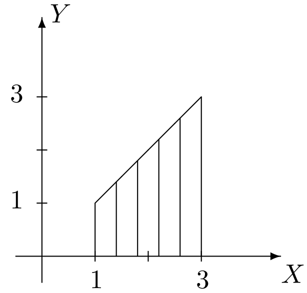
I. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3} \left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\iint_A f(x,y) dx\, dy.$$



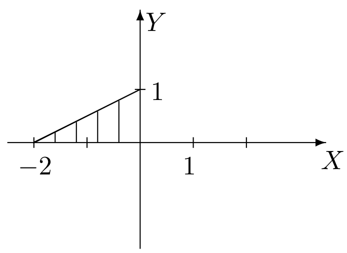
II. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.

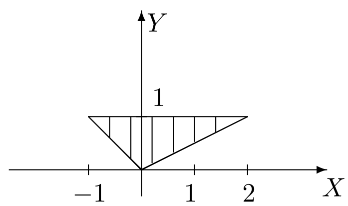
2. Si elle existe, calculer l'intégrale de
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = [\pi/2, \pi] \times [-1,1]$

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

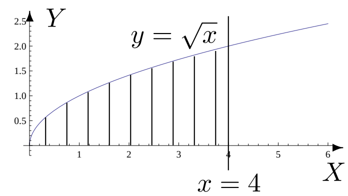
a) $\iint_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\iint_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$



4. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy.$

Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.

Liste 9 : correction de l'interrogation du 31 mars 2026

Liste 10 : fonctions de plusieurs variables (4)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné parallèle à l'axe Y, quand dit-on qu'elle est intégrable sur A ? Comment définit-on alors son intégrale ?
2. Même question si l'ensemble A est parallèle à l'axe X.
3. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné, quand peut-on permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(b) et 4 seront résolus par l'assistant.

I. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.
   a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\,dx \right) dy$
   c) $\displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$
   d) $\displaystyle\iint_A x^3\,e^{-x^2 y}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

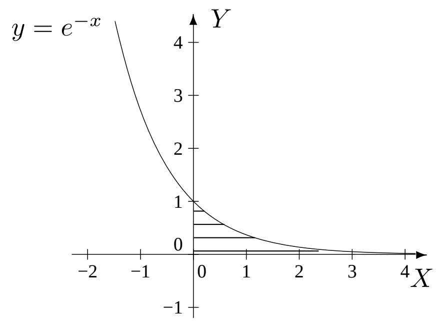
$$a)\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx \right) dy, \quad b)\int_0^1 \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy \right) dx, \quad c)\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\,dy \right) dx$$

3. On considère l'intégrale double suivante

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x)e^{-x}\,dy \right) dx$$

   a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
   b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
   c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

4. Calculer l'intégrale de $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



Liste 11 : fonctions de plusieurs variables (5)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Intégration par changement de variables polaires

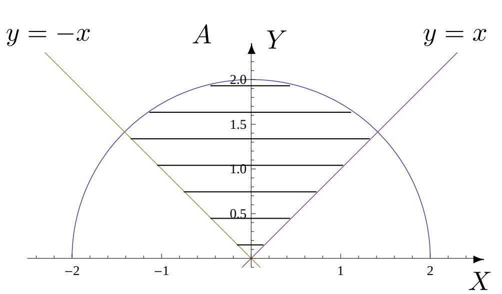
1. Que vaut le jacobien dans le cas d'un changement de variables polaires ?
2. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

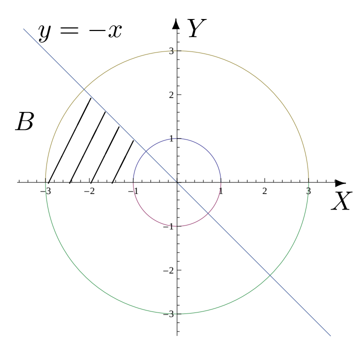
A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, l'exercice I. 1(b) sera résolu par l'assistant.

I. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
   a) $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\; dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   b) $\iint_B xy\; dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   c) $\iint_C (2x+y)\; dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1} \iint_A x\; dx\; dy, \quad y_A = s^{-1} \iint_A y\; dx\; dy$$

   et où s est l'aire de la surface A.
   Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

II. Divers

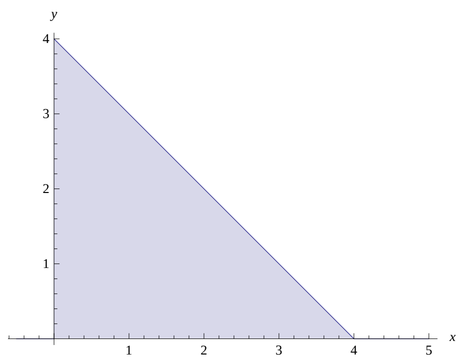
La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \iint_R \delta(x, y) dx dy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent 4 m. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) quelle est la masse de cette plaque ?

b) en quelles unités s'exprime la constante K ?



1. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)

Liste 12 : approximations polynomiales

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Approximations polynomiales

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé “Développement limité de Taylor”.
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

Préambule

*****
A quoi peuvent servir ces approximations ?
*****

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir de sa valeur en a suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de f en x par sa valeur en a est proportionnelle à l'écart entre les deux points (a et x) et à la dérivée de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si f est p fois dérivable dans I, alors quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir des valeurs en a de ses $p-1$ premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi).$$

La fonction P définie par

$$P(t) = f(a) + (t-a)Df(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus $p-1$ en la variable t. Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de f en x est approchée par la valeur en x de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la p^e puissance de l'écart entre a et x et à la dérivée d'ordre p de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Si a est fixé et que la dérivée d'ordre p de f est continue en a, alors on en déduit que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de a. Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques.

Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse m peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par R le rayon terrestre, d la distance [2] Terre-Lune, G la constante de gravité, M la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport R/d est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force F est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de F est donnée par l'expression précédente.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

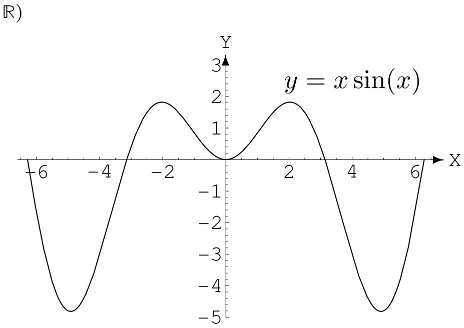
Lors de la répétition, les exercices I. 1 (f_2, f_3, f_5) - 2 (b) - 3 seront résolus par l'assistant.

I. Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations. Pour f_5,
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

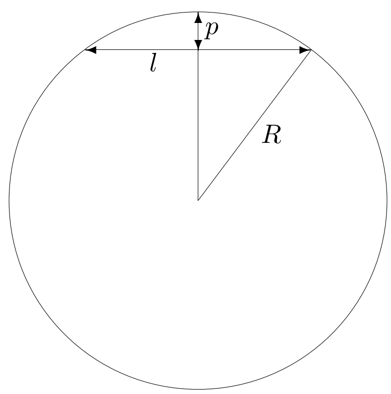
   $f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$
   $f_3(x) = 1/(1-2x),\ x_0 = 0, n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0,1,2$
   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
   b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.
   (Suggestion : $|\sin(x)| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$)



2. entre les centres respectifs

3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...
   Comment peuvent-ils procéder ?
4. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par [3]
$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$
5. Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.



3. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ pour g_1 et décomposer en fractions simples pour g_2

Liste 13 : développements en séries de puissances

A préparer AVANT de venir à la répétition

Définitions et propriétés

1. Qu'appelle-t-on série de puissances ?
2. Quand une série de puissances converge-t-elle
   a) dans un intervalle ?
   b) en tout réel ?
3. Quand et où une série de puissances est-elle dérivable ? Dans ce cas, qu'appelle-t-on dérivation « terme à terme » ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 2 (f_1, f_7 et f_8) seront résolus par l'assistant.

Développements en série de puissances

1. Si possible, développer les fonctions suivantes (données explicitement) en série de puissances de x au voisinage de 0
$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad f_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$
2. Déterminer le développement en série de puissances de x des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x^3 \exp(-x),\ x \in \mathbb{R} \qquad f_2(x) = \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$$
$$f_3(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}\,^4 \qquad f_4(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$$
$$f_5(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R} \qquad f_6(x) = \ln(1+x),\ x \in]-1,1[$$
$$f_7(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x \in]-1,1[\qquad f_8(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$$

4. Les fonctions ch et sh sont appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques

Liste 14 : Mathématiques appliquées

Préambule

Les exercices de cette liste montrent des applications de notions mathématiques étudiées dans le cadre du cours de Mathématiques générales. Ces applications relèvent de la physique, de la biologie, du calcul des probabilités, de la géographie et même de la cryptographie.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Fonctions de plusieurs variables

1. En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [5]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.
   Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de* 3 *paramètres : l'énergie interne* U*, le volume* V *et le nombre de particules* N *du système.*
   Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction* S*, dépendant de* U*,* V *et* N*, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par
   $$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$
   où
   — T est la température du système ;
   — p est la pression du système ;
   — μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [6]) ;
   et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

   Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par
   $$S = k_B N \ln\left(\frac{V - N v_0}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2}\ln\left(\frac{U + K_i N^2/V}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2}\ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2}k_B N$$
   où
   — k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,
   — v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,
   — $K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,
   — m est la masse d'une particule,
   — $\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,
   déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

---

5. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.
6. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

2. La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation[7] :

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

3. La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que
$$(D_xf)(a,b) = (D_yf)(a,b) = 0.$$
Posons
$$D = (D_x^2f)(a,b)(D_y^2f)(a,b) - [(D_xD_yf)(a,b)]^2.$$
(a) Si $D > 0$ et si $(D_x^2f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;

(b) Si $D > 0$ et si $(D_x^2f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;

(c) Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé “point-selle” ;

(d) Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.

En se basant sur ce test,

a) rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction

$$f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

b) déterminer la distance[8] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.

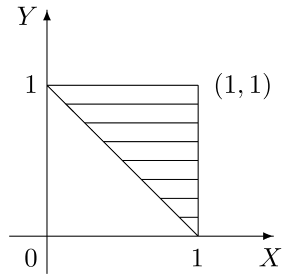
4. Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point(x,y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par

$$Q = \iint_R \rho(x,y)\,dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.

7. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

8. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) est donnée par
$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.



5. En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.
   Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut
$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$
   Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par
$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$
   On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

   Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
   a) le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;
   b) le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.

6. Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par
$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \quad \left(\text{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$
   De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\right) dy = 1,$$
   auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par
$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

   Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \text{si} \quad 0 \le y \le x \le 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.
(b) Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.

7. Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Calcul matriciel

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} Dx(t) &= -4x(t) - 3y(t) + 5t \\ Dy(t) &= -2x(t) - 5y(t) + 5e^t \end{cases}.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

2. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} Dx(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) &= 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

3. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;
   - étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;
   - étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.

   Déterminer
   a) la matrice de transition du système ;
   b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
   c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

4. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :

- étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
- étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
- étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
- si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

Déterminer la matrice de transition du système.

5. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.

   Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.

   Considérons le message

   SUIS EN DANGER

   ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

   Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ..., Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

S	U	I	S	*	E	N	*	D	A	N	G	E	R
19	21	9	19	27	5	14	27	4	1	14	7	5	18.

   Puisqu'on emploie une matrice 2×2, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs [9] 1×2 :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

   On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par C, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

   Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

   Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

9. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

19	21	9	19	27	5	14	27	4	1	14	7	5	18
S	U	I	S	*	E	N	*	D	A	N	G	E	R.

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

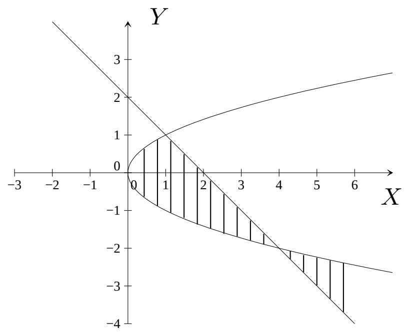
— Sachant que th : $x \mapsto (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.

— Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?

Liste 15 : Révisions en vue de l'examen

I. Description d'ensemble

Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant (les courbes représentées sont une droite et une parabole) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.



II. Fonctions de plusieurs variables

1. On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

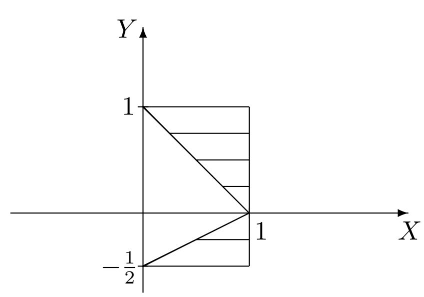
   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2, 1)$.

2. Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-2, 1[\times]-4, 4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(x + y^2, x^2 + 4y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

3. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

   a) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x\sin(y^5)\,dy\right) dx$

   b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous



   c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\,dx\,dy$ si $A = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$

d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2}\, dy \right) dx$

III. Calcul matriciel

1. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
   - Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
   - S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
   - Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
   (i) Déterminer la matrice de transition.
   (ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.

IV. Approximations polynomiales

Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0$, 1, 2 et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

V. Développement en série de puissances

Déterminer le développement en série de puissances de x la fonction $f : x \mapsto 1/(1+x^2)$.

Chapitre 2

Calcul matriciel

2.1 Exercices de base sur le chapitre 1 (partim B)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ \frac{1}{i} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer (si possible)
$$iA,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA, B\overline{B}.$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Factoriser le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. QCM + justifier la réponse
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai □ Faux □
   - Le déterminant d'une matrice carrée dont les éléments sont des complexes est
     un complexe □ une matrice □ un polynôme □ aucune proposition correcte □
   - Si A et B sont des matrices carrées de même dimension qui vérifient $AB = A$, alors B est la matrice identité Vrai □ Faux □
   - Si A est une matrice qui vérifie $A = A^*$, si $c \in \mathbb{C}$ et si on pose $B = cA$, alors $B = B^*$
     Vrai □ Faux □
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors M admet un inverse Vrai □ Faux □
   - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai □ Faux □
   - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
     Vrai □ Faux □
   - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels
     Vrai □ Faux □
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai □ Faux □
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai □ Faux □

Liste 2003-2004

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ \frac{-1}{i^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -i+2 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iA,\ C^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB,\ CA.$$

2. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Le déterminant de la matrice suivante est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix}.$$

5. Factoriser le déterminant des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

6. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elle le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai □ Faux □
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors M admet un inverse Vrai □ Faux □
   - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai □ Faux □
   - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Vrai □ Faux □
   - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels Vrai □ Faux □
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai □ Faux □
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai □ Faux □
   - La somme de deux valeurs propres d'une même matrice est encore une valeur propre de cette matrice Vrai □ Faux □
   - Si le complexe λ_0 est une valeur propre de la matrice M alors $\overline{\lambda_0}$ est une valeur propre de la matrice $\overline{M}$ Vrai □ Faux □
   - Si un complexe est une valeur propre d'une matrice, alors il est aussi valeur propre de la matrice transposée Vrai □ Faux □

Liste 2004/2005

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 2i^4 & \dfrac{(1+i)^2}{i^3} \\ 0 & -1 & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3i+1 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$\widetilde{iA},\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB.$$

2. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (resp. avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$).
3. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Le déterminant des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$\begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

5. Factoriser le déterminant de la matrice suivante en un produit de polynômes du premier degré en x, y, z.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{pmatrix}.$$

6. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Si a est un réel donné, déterminer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Démontrer que si A est une matrice carrée qui vérifie $A^2 - A + \mathbb{1} = 0$ alors A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A.
9. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
    - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = A$, alors A est la matrice nulle ou est la matrice identité Vrai ☐ Faux ☐
    - Si M est une matrice carrée qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors M vérifie aussi $\widetilde{M}M = \mathbb{1}$ Vrai ☐ Faux ☐
    - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A(A+B) = A^2 + AB$ Vrai ☐ Faux ☐
    - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $A^2 - B^2 = (A-B)\ (A+B)$ Vrai ☐ Faux ☐
    - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai ☐ Faux ☐
    - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai ☐ Faux ☐
    - La somme de deux vecteurs propres de valeur propre nulle est encore un vecteur propre de valeur propre nulle Vrai ☐ Faux ☐
    - La trace du produit de deux matrices carrées de même dimension reste la même si on permute l'ordre des facteurs du produit. Vrai ☐ Faux ☐

2.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

• On a

$$iA = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -1+i \end{pmatrix}.$$

• La matrice A est une matrice de format 2×3 tandis que B est une matrice de format 3×2. Ces matrices n'ayant pas le même format, il est impossible de les additionner.

• Puisque B est une matrice de format 3×2, $\widetilde{B}$ est de format 2×3 et peut être additionné à A, matrice de même format. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} & -1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{i} & -2 \\ 0 & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Puisque A est une matrice de format 2×3, A^* est une matrice de format 3×2 ; le produit AA^* est donc possible et donne une matrice de format 2×2. On a

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \text{ donc } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix};$$

ainsi,

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

• Le produit AB est possible puisque A est de format 2×3 et B de format 3×2 ; le produit est une matrice de format 2×2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le produit BA est possible puisque B est de format 3×2 et A de format 2×3 ; le produit est une matrice de format 3×3. On a

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de $\overline{B}$; le produit $B\overline{B}$ est donc impossible.

Exercice 2

• On a $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 1.5 - (-1).(-2) = 3$.

• On a $\det \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix} = i^2 + i^2 = -2$.

• On a

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 + L_3 \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 && \text{en développant le déterminant selon la première ligne.} \end{aligned}$$

Exercice 3

• On a $\det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (-x-1)(3-x)$.

• On a

$$\begin{array}{rll}
\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix} & & \\
= & xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} & \text{mise en évidence du facteur } x \text{ sur } L_1,\ y \text{ sur } L_2 \text{ et } z \text{ sur } L_3 \\
= & xyz\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} & \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1-L_3 \text{ et } L_2 \text{ par } L_2-L_3 \\
= & xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} & \text{mise en évidence du facteur} \left\{\begin{array}{l} x-z \text{ sur } L_1 \\ y-z \text{ sur } L_2 \end{array}\right. \\
= & xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix} & \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\
= & xyz(x-z)(y-z)(y+z-x-z) & \\
= & xyz(x-z)(y-z)(y-x). &
\end{array}$$

• On a

$$\begin{array}{rll}
\det\begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix} & & \\
= & \begin{vmatrix} -x & a & 0 \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} & \text{si on remplace } C_1 \text{ par } C_1+C_2+C_3 \\
= & \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+x \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} & \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1-L_3 \\
= & (a+x)\begin{vmatrix} -x & -2b-x \\ -x & a \end{vmatrix} & \text{en développant le déterminant selon la première ligne} \\
= & -x(a+x)\begin{vmatrix} 1 & -2b-x \\ 1 & a \end{vmatrix} & \text{mise en évidence du facteur } (-x) \text{ sur } C_1 \\
= & -x(a+x)(a+2b+x). &
\end{array}$$

Exercice 4

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\det A = 2-1 = 1 \neq 0$, la matrice A est inversible. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j=1,2)$ de A. On a $(\mathcal{A})_{1,1} = 2,\ (\mathcal{A})_{1,2} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,1} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,2} = 1$. On obtient ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice inverse existe. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j}$, $(i, j = 1, 2, 3)$ de A. On a

$(\mathcal{A})_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad (\mathcal{A})_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\quad (\mathcal{A})_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$(\mathcal{A})_{2,1} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $\quad (\mathcal{A})_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\quad (\mathcal{A})_{2,3} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$(\mathcal{A})_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $\quad (\mathcal{A})_{3,2} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $\quad (\mathcal{A})_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Ainsi, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

5.1) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(2-\lambda) - 2 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 3 ; ces valeurs propres étant simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 0\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 3\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 3\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

La matrice A possède donc la valeur propre double 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme ils sont tous multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, deux vecteurs propres sont toujours linéairement dépendants et donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

5.3) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0\, \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 0\, \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2\, \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 2\, \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + iy = 0 \\ -ix - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice A admet donc la valeur propre triple 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{non simultanément nuls.}$$

Trois vecteurs propres sont donc toujours linéairement dépendants ; la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

5.5) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_3 \text{ par } C_3 + C_1 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant selon la troisième colonne} \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -1, 1 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A + \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A+\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 & (1) + (2) \\ 2y - 2z = 0 & (2) - (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A-\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - y + z = 0 & (1) \\ 3x + y - 3z = 0 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - 4z = 0 & (2) + (3) \\ y = 0 & (1) + (3) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2\,\mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A-2\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

REMARQUES IMPORTANTES

Lors de l'inversion et de la diagonalisation de matrices, on vérifie aisément que la solution trouvée est correcte.

— Quand on a déterminé la matrice inverse d'une matrice donnée, on vérifie que le résultat est correct en effectuant le produit de la matrice de départ par la matrice trouvée. On doit obtenir la matrice identité.

— Quand on a déterminé une forme diagonale Δ de la matrice de départ A et une matrice S qui y conduit, pour savoir si le résultat est correct, on doit vérifier que $S^{-1}AS = \Delta$, ce qui est équivalent à la vérification de l'égalité (bien plus simple !) $AS = S\Delta$.

2.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$iA = \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 1 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}$; $C^* = \begin{pmatrix} 2+i & -4i \\ 3 & i \end{pmatrix}$; $A+B$ impossible car matrices de formats différents ;
$A+\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ -i & 2 \\ -2 & 2+i \end{pmatrix}$; $AA^* = \begin{pmatrix} 8 & -2i & 2+2i \\ 2i & 1 & i \\ 2-2i & -i & 2 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} -4 & 4i & 2i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}$;
$BA = \begin{pmatrix} -1 & -1+2i \\ -1-5i & -1+i \end{pmatrix}$; $CB = \begin{pmatrix} 2+2i & 6 & 1+4i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$;
CA impossible car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exercice 2

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 3

$-7, -6, 0$.

Exercice 4

$x(x-3)$.

Exercice 5

$xyz(y-x)(z-x)(z-y)$ et $-x(x+a)(x+a+2b)$.

Exercice 6

$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Première matrice : valeurs propres simples 0 et 3 donc matrice diagonalisable.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 : $c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

La matrice $S=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$.

Deuxième matrice : valeur propre double 1.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$ donc matrice non diagonalisable.

Troisième matrice : valeurs propres simples 0 et 2 donc matrice diagonalisable.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 : $c\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

La matrice $S=\begin{pmatrix}-i&i\\1&1\end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$.

Quatrième matrice : valeur propre triple 1.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ c_1,c_2\in\mathbb{C}$ non simultanément nuls ; la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Cinquième matrice : valeurs propres -2 (simple) et 7 (double).

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 7 : $c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\ c_1,c_2\in\mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 : $c\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

La matrice $S=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

Exercice 8

Faux, vrai, vrai, faux, faux, faux, faux, faux, vrai, vrai.

2.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

$$\widetilde{iA}=\begin{pmatrix}2&0\\2i&-i\\-2i&1+i\end{pmatrix}\qquad (iB)^*=\begin{pmatrix}-i&-1\\0&-2i\\i&-1-i\end{pmatrix}\qquad A+B=\begin{pmatrix}1-2i&2&-3\\i&1&2\end{pmatrix}$$

$A+\widetilde{B}$: impossible car A et $\widetilde{B}$ ne sont pas de même format.

$AA^*=\begin{pmatrix}12&-4-2i\\-4+2i&3\end{pmatrix}$

AB : impossible car le nombre de colonnes de A (3) diffère du nombre de lignes de B (2).
BA : impossible car le nombre de colonnes de B (3) diffère du nombre de lignes de A (2).

$CB=\begin{pmatrix}1&6&2+6i\\1+4i&-2i&1-5i\end{pmatrix}$

Exercice 2

Toute matrice commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Toute matrice diagonale commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Le premier déterminant est égal à $5+7i$ et le second à $\frac{7}{9}$.

Exercice 4

Le premier déterminant se factorise sous la forme $(3-x)(x+2)$ et le second sous la forme

$$-(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{2})(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}).$$

Exercice 5

Le déterminant se factorise sous la forme $(x-y)(x-z)(z-y)(x+y+z)$.

Exercice 6

Les matrices inverses sont

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

L'inverse de la matrice donnée est $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

—

Exercice 9

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeurs propres : 0 et 4.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 0$: $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 4$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas deux vecteurs linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice A est déjà diagonale.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : $-i$ et $2+i$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -i : c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2+i : c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: valeur propre : 1 (triple).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 1 : c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : -1 (simple) et 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -1 : c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Faux, vrai, faux, faux, faux, faux, faux, vrai.

Chapitre 3

Fonctions de plusieurs variables

3.1 Exercices de base sur le chapitre 2 (partim B)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Quel est le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données ci-dessous ? Représenter graphiquement ces domaines.

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \quad f_2(x,y) = \ln(x-y), \quad f_3(x,y) = \ln(|x|-|y|)$$

$$f_4(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_5(x,y) = \arccos(x^2+y^2), \quad f_6(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

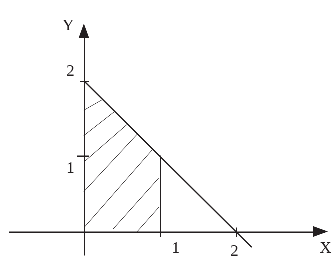
   Calculer

$$D_x^2 f_6(x,y) + D_y^2 f_6(x,y), \quad D_x D_y f_6(x,y).$$

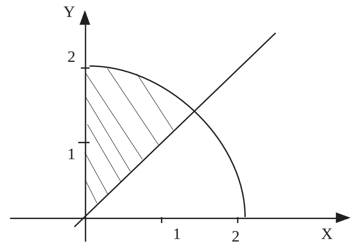
2. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration.

$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\ dy\right)\ dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)\ dy\right)\ dx.$$

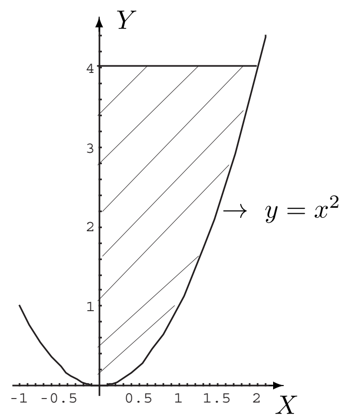
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\ dx\right)\ dy$ et représenter l'ensemble d'intégration.
4. On considère la partie A du plan bornée par les droites d'équation $y = 2x, x = 0, y = 4$. Représenter A et calculer $\displaystyle\iint_A x\ dx\ dy$.
5. On considère la partie A du plan délimitée par l'axe X et le graphique de la fonction $\cos(x), x \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Représenter A et calculer l'intégrale de $f(x,y) = 2y$ sur A.
6. Calculer $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



7. Calculer $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



8. Calculer $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\, dxdy$ où A est la partie hachurée ci-dessous



9. Si elle existe, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx$ et représenter son ensemble d'intégration.
10. Calculer l'intégrale de $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ sur $A=[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

Liste 2003-2004

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad g(x,y)=\ln(|x|+|y|-1).$$

2. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles.

$$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f(x,y)=\ln\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right).$$

3. Déterminer où la fonction $(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2)$ est indéfiniment continûment dérivable et calculer

$$D_x^2 f(x,y)+D_y^2 f(x,y).$$

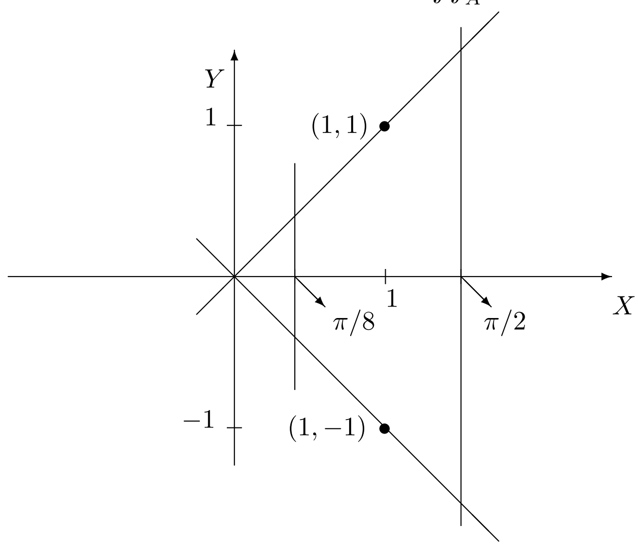
4. On donne les fonctions $(r,\theta)\mapsto f(r,\theta)=r\cos(\theta)$ et $(r,\theta)\mapsto g(r,\theta)=r\sin(\theta)$. Où ces fonctions sont-elles dérivables ? Dans cet ensemble, calculer

$$D_r f(r,\theta)D_\theta g(r,\theta)-D_\theta f(r,\theta)D_r g(r,\theta).$$

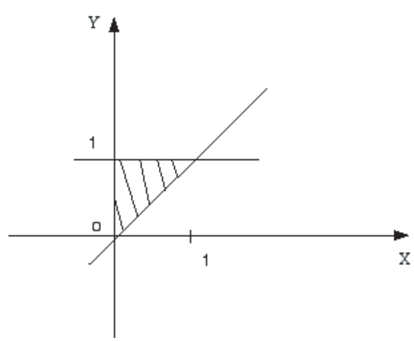
5. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les deux cas suivants

$$a)\ \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{(x+1)/2} f(x,y)dy\right)dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx\right)dy.$$

6. a) On donne l'ensemble A suivant (ensemble borné fermé), borné par les deux droites obliques et les deux droites parallèles à Y. Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A \sin(x+y)\ dxdy$ et simplifier la réponse au maximum.



b) On donne l'ensemble A suivant (ensemble hachuré, borné et fermé). Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A x\sqrt{y^2-x^2}\ dxdy$.



7. a) On donne l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,e], y \in [0, \ln(x)]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = y$. Représenter A. Calculer (et justifier l'intégrabilité) l'intégrale de f sur A en choisissant un ordre d'intégration. Effectuer à nouveau le calcul après avoir permuté l'ordre d'intégration.

b) On donne $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], x \in [y,1]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = e^{x^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

c) On donne $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2], y \geq 0\} = [1,2] \times [0,+\infty[$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = ye^{-xy}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

d) On donne l'ensemble $A = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1, 1/\sqrt[3]{y} \leq x \leq 1/\sqrt{y}\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = e^{yx^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

8. a) Représenter l'ensemble d'intégration et calculer (en justifiant)

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\right) dx.$$

b) Représenter l'ensemble d'intégration, calculer (en justifiant) et donner une interprétation géométrique de l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \ dy \right) dx.$$

Suggestion d'exercices supplémentaires

1. Calculer et représenter l'ensemble d'intégration :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ dy \right) dx.$$

2. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

(Suggestion : transformer $1/x$ en une intégrale ; permuter alors les intégrales.)

3. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx.$$

(Suggestion : transformer $\ln(x)$ en une intégrale : $2\ln(x) = \int_0^{+\infty} (x^2/(1+x^2y) - 1/(1+y))dy$; permuter alors les intégrales.)
En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln(x)/(1-x)dx$ et de $\int_0^1 \ln(x)/(1+x)dx$, puis la valeur de $\sum_{m=1}^{+\infty} 1/m^2$ et de $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m/m^2$.
(Suggestions : Garnir, Fonctions de variables réelles II, pp 257-259.)

Liste 2004/2005

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 9}, \quad g(x,y) = \ln(|x+y| - 1), \quad h(x,h) = \arcsin\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

2. Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilté des fonctions f, g données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f, les dérivées partielles premières de h et $|x|D_x g(x,y) + |y|D_y g(x,y)$.

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}), \quad g(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y+1}).$$

3. On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]0,+\infty[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction $F \ : \ t \mapsto f(\ln(t), e - e^t)$ et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f.

4. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

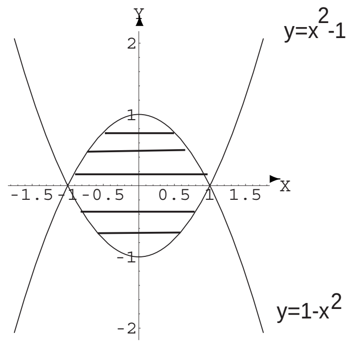
$$a) \int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{-x/2} f(x,y)dy \right) dx, \qquad b) \int_{-1}^{0} \left(\int_{-3x-4}^{0} f(x,y)dy \right) dx \quad c) \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

5. On considère l'ensemble borné fermé du plan (parallélogramme) délimité par les droites dont les équations équations cartésiennes sont les suivantes

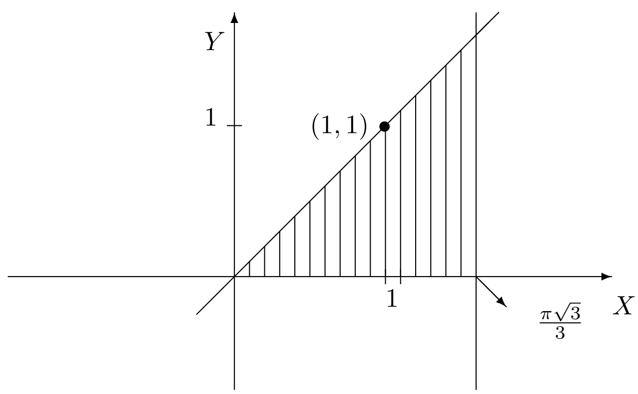
$$d_1 : x - y = 0, \quad d_1 : 2y + x = 0, \quad d_3 : 2y + x - 2 = 0, \quad d_4 : y - x = 2.$$

Représenter cet ensemble et déterminer l'intégrale de $f(x, y) = y$ sur celui-ci.

6. On considère l'ensemble $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, \ln(x + e)\}\right\}$. Déterminer, si elle existe, l'intégrale de $f(x, y) = x + y$ sur A.
7. a) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = y^2 \sin(xy)$ sur $A = [0, \pi/2] \times [0, 1]$.
b) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x + y$ sur $A = \{(x, y) \ : \ 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$.
8. a) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = xe^y$ sur l'ensemble borné fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



b) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$ sur l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)



9. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2 + y} \ dy \right) dx, \ b) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + y} \ dy \right) dx,$$

$$c) \int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2} \ dx \right) dy, \ d) \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x + y} \ dy \right) dx$$

10. Calculer l'intégrale de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.
11. Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement $1, 2$, centrés à l'origine et l'axe X. Calculer l'intégrale de $f(x, y) = 1 + 3x + 8y^2$ sur A.
12. Calculer et représenter l'ensemble d'intégration :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right) dx.$$

13. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$
(Suggestion : transformer $1/x$ en une intégrale ; permuter alors les intégrales.)

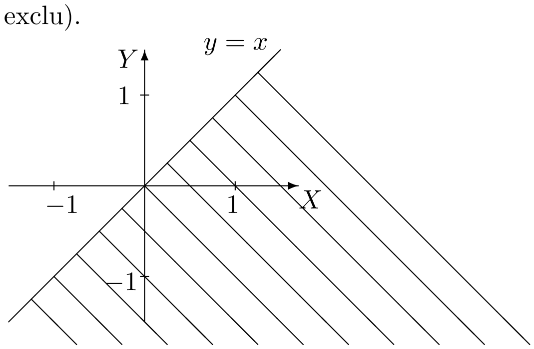
14. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1 - x^2} dx.$$
(Suggestion : transformer $\ln(x)$ en une intégrale : $2\ln(x) = \int_0^{+\infty}(x^2/(1+x^2y) - 1/(1+y))dy$; permuter alors les intégrales.)
En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln(x)/(1-x)dx$ et de $\int_0^1 \ln(x)/(1+x)dx$, puis la valeur de $\sum_{m=1}^{+\infty} 1/m^2$ et de $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m/m^2$.
(Suggestions : Garnir, Fonctions de variables réelles II, pp 257-259.)

3.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

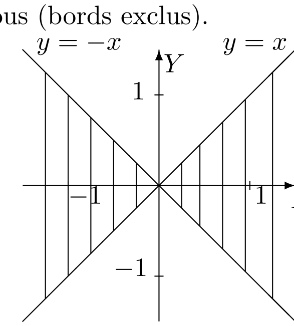
Exercice 1

• La fonction $(x, y) \mapsto f_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ est définie et dérivable sur
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - (x^2 + y^2) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$
qui est l'ensemble des points intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1 (bord exclu).

• La fonction $(x, y) \mapsto f_2(x, y) = \ln(x - y)$ est définie et dérivable sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$ qui est l'ensemble hachuré ci-dessous (bord exclu).



• La fonction $(x, y) \mapsto f_3(x, y) = \ln(|x| - |y|)$ est définie sur
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}.$$
L'analyse de cette condition donne
$$|y| < |x| \Leftrightarrow -|x| < y < |x| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x < y < x \text{ si } x \geq 0 \\ x < y < -x \text{ si } x \leq 0 \end{array} \right. ;$$
A est donc l'ensemble hachuré ci-dessous (bords exclus).



Pour déterminer le domaine de dérivabilité, il faut tenir compte du fait que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en zéro et que la fonction $X \mapsto \ln(X)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Ainsi f_3 est dérivable sur

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0,\ x \neq 0 \text{ et } \ y \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0,\ y \neq 0\}.$$

• La fonction $(x, y) \mapsto f_4(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$; elle est dérivable sur

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

.

• La fonction $(x, y) \mapsto f_5(x, y) = \mathrm{arcos}(x^2 + y^2)$ est définie sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ et dérivable sur $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + y^2 < 1\}$. Comme $x^2 + y^2 \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon 1, le bord étant compris ; pour l'ensemble B, le bord est donc exclu.

• La fonction$(x, y) \mapsto f_6(x, y) = \arctan(x/y)$ est définie et dérivable sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, ensemble des points du plan dont on exclut ceux de l'axe des abscisses.
Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f_6 par rapport à x puis par rapport à y. On a

$$D_x f_6(x, y) = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \times \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}\,; \qquad D_x^2 f_6(x, y) = \frac{-2xy}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$D_y f_6(x, y) = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \times \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2 + x^2}\,; \qquad D_y^2 f_6(x, y) = \frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Dès lors,

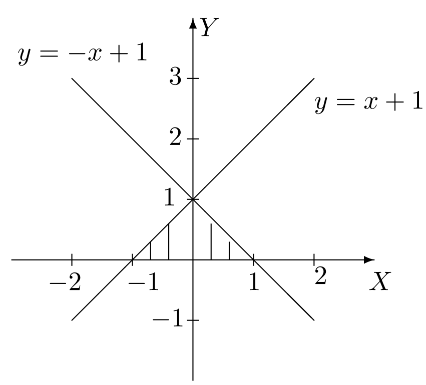
$$D_x^2 f_6(x, y) + D_y^2 f_6(x, y) = \frac{-2xy + 2xy}{(y^2 + x^2)^2} = 0.$$

Enfin,

$$D_x D_y f_6(x, y) = D_x \left[\frac{-x}{y^2 + x^2}\right] = \frac{-y^2 - x^2 + 2x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Exercice 2

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x \in [y - 1, 1 - y]\}$; il se représente de la façon suivante



Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

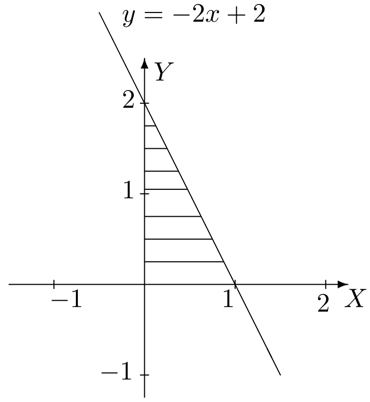
Comme on peut aussi décrire cet ensemble par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [0, x + 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, -x + 1]\},$$

si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx + \int_0^1\left(\int_0^{-x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], y\in[0,-2x+2]\}$; il se représente de la façon suivante



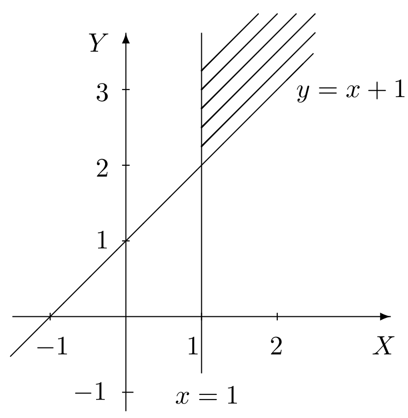
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,2], x\in[0,1-y/2]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^{1-y/2} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,+\infty[, y\in[x+1,+\infty[\}$; il se représente de la façon suivante



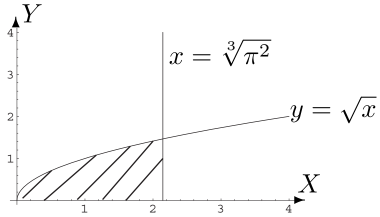
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty}\left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[2,+\infty], x\in[1,y-1]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^{+\infty}\left(\int_1^{y-1} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Exercice 3
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \sqrt[3]{\pi}], x \in [y^2, \sqrt[3]{\pi^2}]\}$; il se représente de la façon suivante



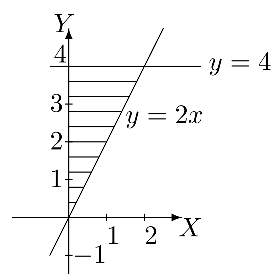
Comme la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(\sqrt{x^3})$ y est continue, elle y est intégrable et on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\,dx \right) dy.$$

Pour faciliter les calculs, permutons l'ordre d'intégration.
Puisque A peut aussi être décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt[3]{\pi^2}], y \in [0, \sqrt{x}]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x^3})\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \frac{2}{3} D(\sqrt{x^3})\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\sqrt{x^3}) \right]_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos(\pi) + \frac{2}{3}\cos(0) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

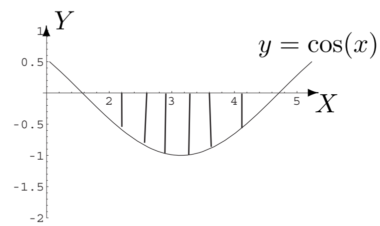
Exercice 4
Considérons la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [2x,4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x$ est continue sur A, donc intégrable sur A. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{2x}^4 x\,dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \Big[xy \Big]_{y=2x}^{y=4} dx \\
&= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 5
Soit la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\pi/2, 3\pi/2], y \in [\cos(x), 0]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = 2y$ est continue sur A, donc intégrable sur A. On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_{\cos(x)}^{0} 2y\,dy \right) dx \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Big[y^2 \Big]_{\cos(x)}^{0} dx \\
&= -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 + \cos(2x))\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\
&= -\frac{1}{2}(3\pi/2 + \sin(3\pi)/2) + \frac{1}{2}(\pi/2 + \sin(\pi)/2) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, 2-x]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x + y$ est continue, donc intégrable sur A. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-x} (x+y)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(2x - x^2 + 2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + 2 \right) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{6} + 2x \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 7
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{2}], y \in [x, \sqrt{4-x^2}]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est continue, donc intégrable sur A. Si on travaille en coordonnées polaires, cet ensemble, privé de l'origine, est décrit par $A' = \{(r,\theta) \in]0,2] \times [\pi/4, \pi/2]\}$; dans

ces conditions, on a $f(x,y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{r^2} = r$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2\,d\theta\right) dr\\ &= \int_0^2 r^2\,dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} 1\,d\theta\\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{8}{3}\times\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

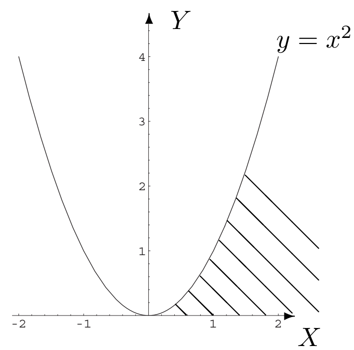
Exercice 8

L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [x^2,4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}$ est continue, donc intégrable sur$A$. L'ensemble A peut aussi être décrit sous la forme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,4], x \in [0,\sqrt{y}]\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dx\right) dy\\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2\sqrt{1+y^2}}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx\\ &= \int_0^4 \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int_0^4 D(1+y^2).\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left[2\sqrt{1+y^2}\right]_0^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).\end{aligned}$$

Exercice 9

La fonction $f : (x,y) \mapsto xe^{-x^2}/(x^2+y)$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y \neq 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous.



Etudions l'intégabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$.
Pour x fixé dans $]0,+\infty[$, la fonction $g : y \mapsto xe^{-x^2}/(x^2+y)$ est continue sur le fermé borné $[0,x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy = \left[xe^{-x^2}\ln(x^2+y)\right]_0^{x^2} = xe^{-x^2}(\ln(2x^2)-\ln(x^2)) = xe^{-x^2}\ln(2).$$

Etudions l'intégrabilité de la fonction $h : x \mapsto xe^{-x^2}\ln(2)$ continue sur $[0,+\infty[$. Comme h est continu sur $[0,t]\ \forall t > 0$, on a

$$\int_0^t xe^{-x^2}\ln(2)\ dx = -\frac{\ln(2)}{2}\int_0^t -2xe^{-x^2}\ dx = -\frac{\ln(2)}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^t = -\frac{\ln(2)}{2}(e^{-t^2}-1).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\ln(2)}{2}(e^{-t^2}-1)\right)=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{\ln(2)}{2}\lim_{t\to+\infty}e^{-t^2}=\frac{\ln(2)}{2}$$

puisque $\lim_{t\to+\infty}e^{-t^2}=0$ par application du théorème de la limite des fonctions composées.
Comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme la fonction f est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)\,dx=\frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 10
La fonction $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ est une fonction à variables séparées et l'ensemble d'intégration A se présente aussi sous la forme d'un produit cartésien d'intervalles :

$$f(x,y)=g_1(x).g_2(y)\quad x\in[0,+\infty[,\ y\in[0,+\infty[,\quad g_1=g_2:t\mapsto e^{-t^2}.$$

Le calcul de l'intégrale de cette fonction sur A est traité dans les notes de cours et effectué au cours.

3.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

dom $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:4-x^2-y^2>0\}$, ensemble des points du plan intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 2 ("bord" exclu).
dom $g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|+|y|-1>0\}$, ensemble des points du plan extérieurs au carré ayant pour sommets les points de coordonnées $(1,0),(0,1),(-1,0)$ et $(0,-1)$ ("bords" exclus).

Exercice 2

Domaine de définition et de dérivabilité $=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ensemble de tous les points du plan excepté l'origine.

$$D_xf(x,y)=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad\qquad D_yf(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Domaine de définition et de dérivabilité $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2/4-1>0\}$, ensemble des points du plan extérieurs à l'ellipse centrée à l'origine et dont les sommets sont les points de coordonnées $(1,0),(0,2),(-1,0)$ et $(0,-2)$ ("bord" exclu).

$$D_xf(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2/4-1}\qquad\qquad D_yf(x,y)=\frac{y}{2\,(x^2+y^2/4-1)}.$$

Exercice 3

Fonction indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; $D_x^2f(x,y)+D_y^2f(x,y)=0$.

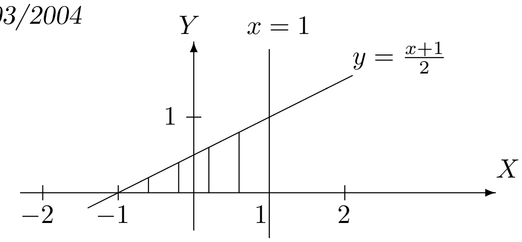
Exercice 4

Fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$; $D_rf(r,\theta)D_\theta g(r,\theta)-D_\theta f(r,\theta)D_rg(r,\theta)=r$.

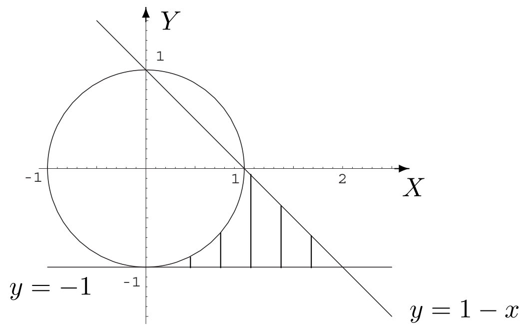
Exercice 5

Les ensembles d'intégration sont les parties hachurées du plan.

a) $\int_0^1(\int_{2y-1}^1 f(x,y)dx)dy$



b) $\int_0^1 (\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy)dx + \int_1^2 (\int_{-1}^{1-x} f(x,y)dy)dx$



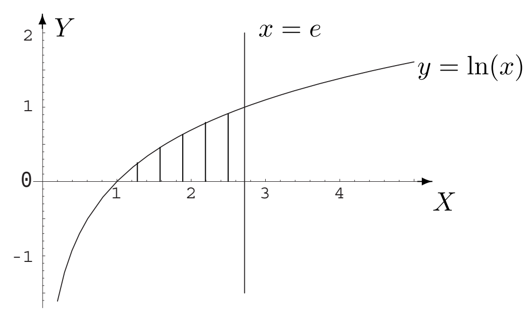
Exercice 6

a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $3\pi/8 + \sqrt{2}/4$.

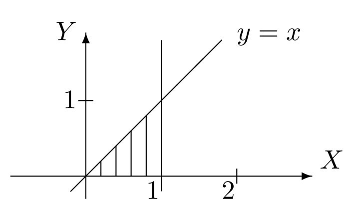
b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $1/12$.

Exercice 7

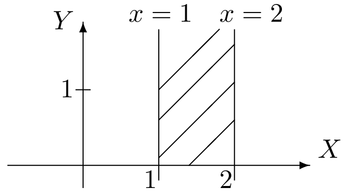
A est l'ensemble hachuré.
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $e/2 - 1$.



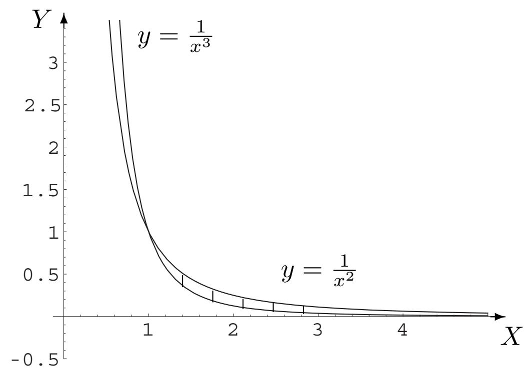
b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $(e-1)/2$.



c) $\forall (x,y) \in A : |f(x,y)| = f(x,y)$. Pour x fixé dans $[1,2]$, la fonction $y \mapsto ye^{-xy}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle y est continue et $\lim\limits_{y \to +\infty} (y^2 \,.\, ye^{-xy}) = 0$. De plus, $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dy = 1/x^2$ et la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est continue sur le fermé borné $[1,2]$ donc intégrable. L'intégrale donnée vaut $1/2$.



d) $\forall (x,y) \in A : |f(x,y)| = f(x,y)$. Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $y \mapsto e^{yx^2}$ est continue sur le fermé borné $[1/x^3, 1/x^2]$ donc intégrable et on a $\int_{1/x^3}^{1/x^2} e^{yx^2} dy = (e - e^{1/x})/x^2$. La fonction $x \mapsto (e - e^{1/x})/x^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car elle y est continue et $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \times \frac{1}{x^2} \left(e - e^{1/x} \right) \right) = e - 1$. L'intégrale donnée vaut 1.



Exercice 8

a) L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points situés dans le quatrième quadrant, intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1. f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\pi(1 - 2/e)/2$.

b) L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points du premier quadrant situés entre le cercle centré au point de coordonnées $(1/2, 0)$ de rayon $1/2$ et le cercle centré à l'origine de rayon 1. f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\pi/8$; ce réel est la mesure de l'aire de la surface A.

Suggestion d'exercices supplémentaires

Exercice 1

L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points du premier quadrant situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon 1. Comme f est continu sur A, ensemble fermé borné, f y est intégrable ; l'intégrale vaut $\pi/16$.

Exercice 2

La fonction est continue sur $]0,+\infty[$ et on vérifie qu'elle est intégrable en 0 et $+\infty$ en utilisant le critère en θ par exemple. L'intégrale vaut $\ln(2)$.

Exercice 3

La fonction est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et on vérifie qu'elle est intégrable en 0, 1 et $+\infty$. L'intégrale vaut $-\pi^2/4$. De plus, si

$$X = \int_0^1 \ln(x)/(1-x)dx \;\text{ et }\; Y = \int_0^1 \ln(x)/(1+x)dx, \;\text{ on a }\; \left\{ \begin{array}{l} X + Y = 2\displaystyle\int_0^1 \ln(x)/(1-x^2)dx \\ X - Y = X/2 \end{array} \right. .$$

Comme $\int_0^1 \ln(x)/(1-x^2)dx = \int_1^{+\infty} \ln(x)/(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln(x)/(1-x^2)dx = -\pi^2/8$, on obtient

$X = -\pi^2/6$ et $Y = -\pi^2/12$.

Enfin, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} 1/m^2 = \pi^2/6$ et $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m/m^2 = -\pi^2/12$.

3.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

— dom $(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 9 \geq 0\}$: ensemble des points situés entre les branches de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 + 9 = 0$ ayant pour sommets les points de coordonnées $(0,3)$ et $(0,-3)$, les points de la courbe étant compris.

— dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| - 1 > 0\}$: ensemble des points situés à l'extérieur des droites d'équation $x + y = 1$ et $x + y = -1$, les points des droites étant exclus.

— dom $(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \geq 1\}$: même ensemble de points que pour g mais les points des droites sont inclus.

Exercice 2

— Pour f, les deux domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ensemble des points du plan dont on exclut l'origine. On a

$$D_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$D_x^2 f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_y^2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_x D_y f(x,y) = D_y D_x f(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

— Pour g, dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$ tandis que le domaine d'infinie dérivabilité est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$. Le domaine de définition de g est l'ensemble des points situés entre les droites d'équation $x + y = 0$ et $x - y = 0$ et comprenant notamment les points de coordonnées $(0,1)$ et $(0,-1)$, les points des droites étant inclus mais non le point de coordonnées $(0,0)$; pour le domaine d'infinie dérivabilité, les points des droites sont exclus. On a

$$|x| D_x g(x,y) + |y| D_y g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy > 0 \\ -2x/\sqrt{y^2-x^2} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$

— Pour h, les deux domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y + 1 > 0\}$: ensemble des points extérieurs à la parabole d'équation $y = -x^2 - 1$, les points de la courbe étant exclus. On a

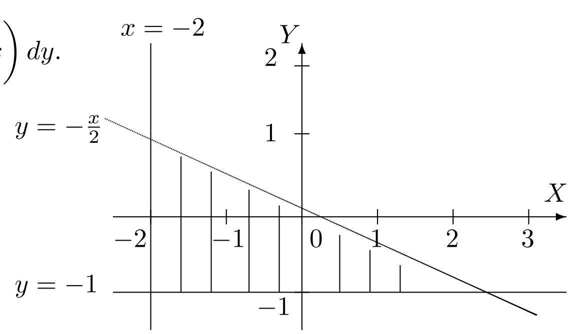
$$D_x h(x,y) = \frac{x}{x^2+y+1} \qquad D_y h(x,y) = \frac{1}{2(x^2+y+1)}.$$

Exercice 3

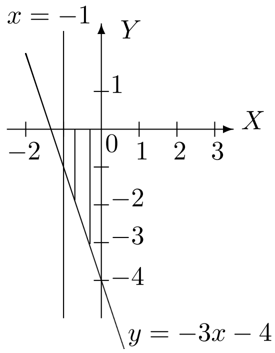
La fonction F est dérivable sur $]1/e, 1[$ et on a $DF(t) = (D_1 f)_{(f_1,f_2)} \times 1/t - (D_2 f)_{(f_1,f_2)} \times e^t$.

Exercice 4

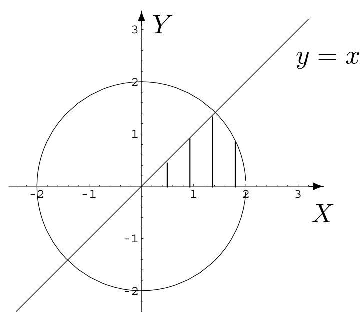
a) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{-2y} f(x,y)\, dx \right) dy$.



b) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-(y+4)/3}^{0} f(x,y)\ dx\right) dy + \int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\ dx\right) dy.$

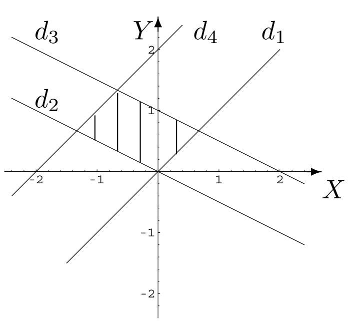


c) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\ dy\right) dx.$



Exercice 5

Si A est l'ensemble hachuré alors $\iint_A\ f(x,y)\ dx\ dy = 8/9$.



Exercice 6

L'intégrale vaut $\dfrac{3e^2}{4} - \dfrac{e}{2} - \dfrac{5}{4}$.

Exercice 7

a) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi^2}$ b) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{3}$.

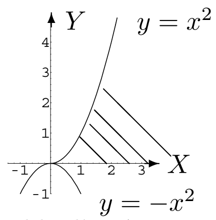
Exercice 8

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], y \in [-1+x^2, -x^2+1]$ et l'intégrale vaut 0.

b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \pi\sqrt{3}/3\right], y \in [0,x]\right\}$ et l'intégrale vaut $\dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi^2}{3}\right)$.

Exercice 9

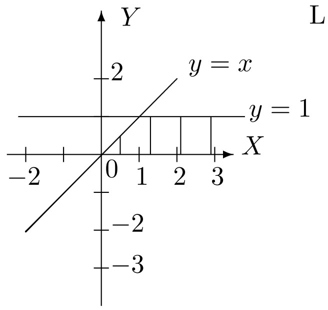
a)



L'intégrale vaut $\ln(2)/2$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré.

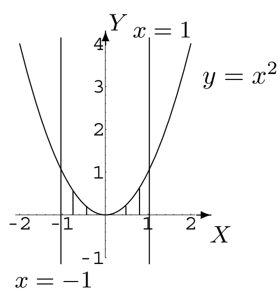
b) L'ensemble d'intégration est le même que ci-dessus et l'intégrale vaut $\ln(2)\sqrt{\pi}/2$.

c)



L'intégrale vaut $\pi/2$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré.

d)



L'intégrale vaut $2\ln(2) - 2$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré.

Exercice 10

L'intégrale vaut $4\pi/3$.

Exercice 11

L'intégrale vaut $33\pi/2$.

Exercice 12

L'ensemble d'intégration est le premier quadrant du cercle trigonométrique et l'intégrale vaut $\pi/16$.

Exercice 14

L'intégrale vaut $\ln(2)$.

Exercice 15

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{4} \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Chapitre 4

Approximations polynomiales

4.1 Exercices de base sur le chapitre 3 (partim B)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n au point x_0 pour chacune des fonctions données ci-dessous.

   $f(x) = x\sin(x), n = 3, x_0 = 0, \qquad f(x) = \sqrt{1+x}, n = 2, x_0 = 0, \qquad f(x) = \ln(x+1), n = 3, x_0 = 0$
   $f(x) = \ln(x), n = 2, x_0 = 2$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.
3. a) Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

   $$i, \quad 1+i, \quad \frac{1}{i}.$$

   b) Déterminer les racines quatrièmes du complexe -1. Représenter ces racines.

Liste 2003/2004

1. Déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre n au point x_0 dans chacun des cas suivants.

   $$\begin{array}{ll} f_1(x) = x^2\cos(x),\ x_0 = 0, n = 4 & f_2(x) = \tan(x),\ x_0 = \pi, n = 4 \\ f_3(x) = \tan(x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}, n = 3 & f_4(x) = \sqrt{2x+1},\ x_0 = 0, n = 2 \\ f_5(x) = \ln(1-x^2),\ x_0 = 0, n = 2 & f_6(x) = x\ \mathrm{arcos}(x),\ x_0 = 0, n = 2 \end{array}$$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Montrer que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0 de la fonction cos converge vers 0 si $n \to +\infty$. En déduire le développement de cos en série de puissances de x.
4. Déterminer les racines cubiques du complexe -2 et en donner la représentation géométrique.
5. Déterminer les racines cubiques du complexe $1+i$ et du complexe $-i$. En donner une représentation géométrique.

Liste 2004/2005

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction donnée explicitement.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 & f_2(x) = xe^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \\ f_3(x) = 1/(1+x^2),\ x_0 = 0, n = 0,1,2 & f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \\ f_5(x) = \ln(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2,3 & f_6(x) = (1+x)^3,\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3,4 \end{array}$$

Représenter f_3 et son approximation à l'ordre 2 en 0.

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 4 en 0 de la fonction sin. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données explicitement par [1]
$$g_1(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), \quad g_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$
4. Déterminer les racines cubiques du complexe i et en donner la représentation géométrique.
5. Déterminer les racines quatrièmes du complexe -16. En donner une représentation géométrique. Déterminer les racines carrées et les racines quatrièmes du complexe $(i\sqrt{3}-1)/2$. En donner la représentation géométrique.
6. Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.
7. L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction en un point est toujours
☐ un polynôme de degré 3
☐ une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur
☐ un nombre réel plus petit ou égal à 3
☐ une fonction
☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte.

4.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— La fonction $x \mapsto f(x) = x\sin(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = \sin(x) + x\cos(x),\ D^2f(x) = 2\cos(x) - x\sin(x),\ D^3f(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$$
sur $\mathbb{R}$, donc
$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad D^2f(0) = 2, \quad D^3f(0) = 0.$$
Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme
$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x^2.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a
$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad D^2f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$
sur $]-1,+\infty[$, donc
$$f(0) = 1, \quad Df(0) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(0) = -\frac{1}{4}.$$
Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme
$$P_2(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

1. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ pour g_1 et décomposer en fractions simples pour g_2.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x+1)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = (x+1)^{-1},\ D^2 f(x) = -(x+1)^{-2},\ D^3 f(x) = 2(x+1)^{-3}$$

sur $]-1, +\infty[$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 1, \quad D^2 f(0) = -1, \quad D^3 f(0) = 2.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2 f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3 f(0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = x^{-1}, \quad D^2 f(x) = -x^{-2}$$

sur $]0, +\infty[$, donc

$$f(2) = \ln(2), \quad Df(2) = \frac{1}{2}, \quad D^2 f(2) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x-2) = f(2) + (x-2)\ Df(2) + \frac{(x-2)^2}{2}\ D^2 f(2) = \ \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8}.$$

Exercice 2

La fonction $x \mapsto f(x) = \sin(x)$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vu le développement limité de Taylor, on sait que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 est $R_2(x) = x^3 D^3 f(u_0)/6$, $x \in \mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x. Puisque $Df(x) = \cos(x)$, $D^2 f(x) = -\sin(x)$ et $D^3 f(x) = -\cos(x)$, on a

$$R_2(x) = -\frac{x^3}{6}\cos(u_0) \qquad \text{et} \qquad |R_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$

De même, le reste de l'approximation à l'ordre 3 est $R_3(x) = x^4\ D^4 f(u_0)/24 = x^4\ \sin(u_0)/24$, $x \in \mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x puisque $D^4 f(x) = \sin(x)$. Mais comme l'approximation de la fonction sinus à l'ordre 4 est la même que l'approximation à l'ordre 3, en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$R_3(x) = R_4(x) = \frac{x^5}{120} D^5 f(u_0) = \frac{x^5}{120}\cos(u_0) \qquad \text{et} \qquad |R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

a) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

— La forme trigonométrique de i est $e^{i\,\pi/2}$ car $i = 0 + i\ .\ 1$ et donc $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$. De plus, comme $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $\theta = \pi/2$.

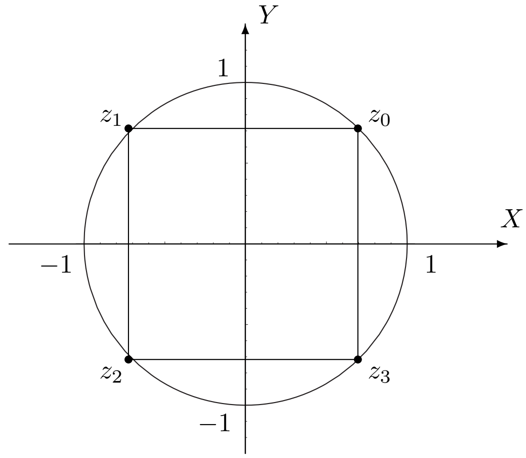
— Considérons $z = 1 + i$; on a $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et, dès lors, $z = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 + i\ \sqrt{2}/2\right)$. Ainsi, $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \sqrt{2}/2$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, ce qui donne $\theta = \pi/4$. Pour conclure, la forme trigonométrique de $1 + i$ est donc $\sqrt{2}\ e^{i\,\pi/4}$.

— Le complexe $1/i = -i$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i\,3\pi/2}$ puisque $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$, $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = -1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

b) La forme trigonométrique de -1 est $e^{i\,\pi}$. Ainsi, ses racines quatrièmes sont données par $z_k = e^{i\,(\pi + 2k\pi)/4}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$. Dès lors, on a

$$z_0 = e^{i\,\pi/4},\ z_1 = e^{i\,3\pi/4},\ z_2 = e^{i\,5\pi/4} \text{ et } z_3 = e^{i\,7\pi/4}.$$

Ces racines quatrièmes se représentent sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 et sont les sommets d'un carré, points communs au cercle et aux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.



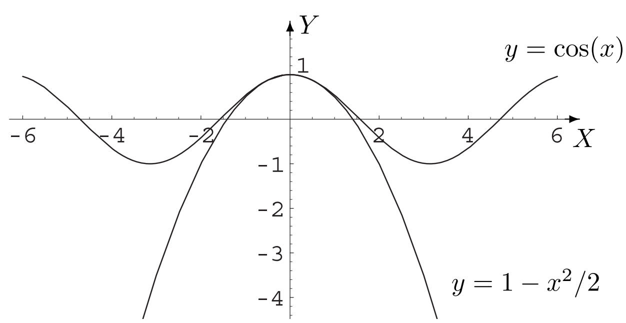
4.3 Solutions des exercices de la “liste type 2003/2004”

Exercice 1

$f_1 : P_4(x) = x^2 - x^4/2,\ x \in \mathbb{R}.$
$f_2 : P_4(x-\pi) = x - \pi + (x-\pi)^3/3,\ x \in]\pi/2, 3\pi/2[.$
$f_3 : P_3(x-\pi/4) = 1 + 2(x-\pi/4) + 2(x-\pi/4)^2 + 8(x-\pi/4)^3/3,\ x \in]-\pi/2, \pi/2[.$
$f_4 : P_2(x) = 1 + x - x^2/2,\ x \in]-1/2, +\infty[.$
$f_5 : P_2(x) = -x^2,\ x \in]-1, 1[.$
$f_6 : P_2(x) = \pi x/2 - x^2,\ x \in]-1, 1[.$

Exercice 2

$R_2(x) = x^3 \sin(u)/6$ avec u strictement compris entre 0 et x ; on a donc $|R_2(x)| \leq x^3/6,\ x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Exercice 4

$z_0 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\,\pi/3}, \qquad z_1 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\,\pi}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\,5\pi/3}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l’origine et de rayon $\sqrt[3]{2}$.
Un des sommets appartient à l’axe des X, son abscisse étant négative.

Exercice 5

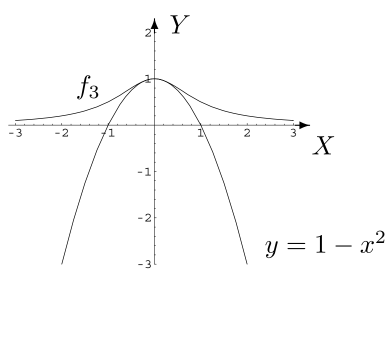
Pour $1+i$: $z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\,\pi/12}$, $z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\,3\pi/4}$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\,17\pi/12}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[6]{2}$.
Un des sommets appartient à la deuxième bissectrice et est situe dans le second quadrant.

Pour $-i$: $z_0 = e^{i\,\pi/2}$, $z_1 = e^{i\,7\pi/6}$, $z_2 = e^{i\,11\pi/6}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Un des sommets appartient à l'axe des Y, son ordonnée étant positive.

4.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

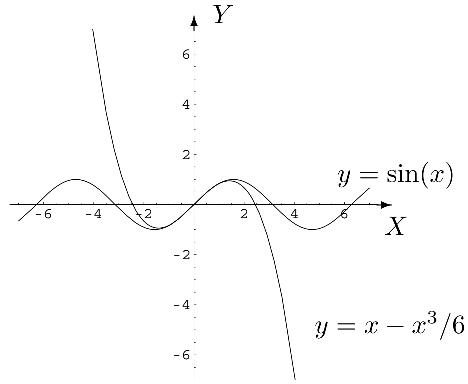
Exercice 1

	$P_0(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$	$P_2(x-x_0)$	$P_3(x-x_0)$	$P_4(x-x_0)$
f_1	1	$1-2x$	$1-2x+2x^2$	$1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3, x\in\mathbb{R}$	
f_2	0	x	$x-2x^2$	$x-2x^2+2x^3, x\in\mathbb{R}$	
f_3	1	1	$1-x^2, x\in\mathbb{R}$		
f_4	0	x	x	$x-\frac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$	
f_5	0	$x-1$	$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}$	$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}, x\in]0,+\infty[$	
f_6	1	$1+3x$	$1+3x+3x^2$	$1+3x+3x^2+x^3$	$1+3x+3x^2+x^3, x\in\mathbb{R}$



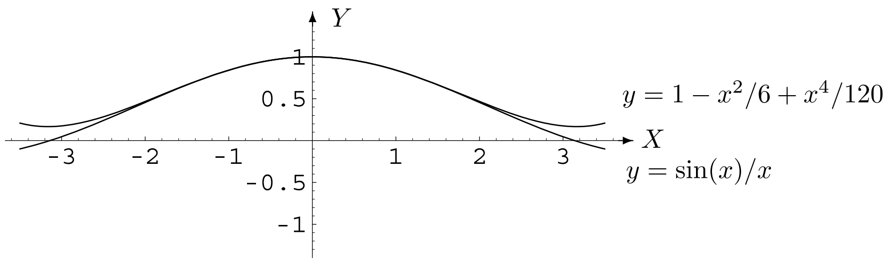
Exercice 2

$R_4(x) = \cos(u_0)x^5/5!$ avec u_0 strictement compris entre 0 et x.
Approximation : $P_4(x) = x - x^3/6, x\in\mathbb{R}$.



$$R_4(x) = \frac{x^5}{5\ !}(u_0^5 \cos(u_0) - 5\ u_0^4 \sin(u_0) - 20\ u_0^3 \cos(u_0) + 60\ u_0^2 \sin(u_0) + 120\ u_0 \cos(u_0) - 120\ \sin(u_0))\ .\ u_0^{-6}$$

avec u_0 strictement compris entre 0 et x.
Approximation : $P_4(x) = 1 - x^2/6 + x^4/120, x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
g_1	0	$2x$	$2x$	$2x + 2x^3/3, x \in]-1, 1[$
g_2	2	$2 + 3x$	$2 + 3x + 5x^2$	$2 + 3x + 5x^2 + 9x^3, x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2, 1\}$

Exercice 4

Les racines cubiques de i sont $z_0 = e^{i\,\pi/6}, z_1 = e^{i\,5\pi/6}, z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Ce sont les sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique dont le sommet correspondant à z_2 est le point de coordonnées $(0, -1)$.

Exercice 5

Les racines quatrièmes de -16 sont $z_0 = 2e^{i\,\pi/4}, z_1 = 2e^{i\,3\pi/4}, z_2 = 2e^{i\,5\pi/4}, z_3 = 2e^{i\,7\pi/4}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 2, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Les racines carrées de $(i\sqrt{3} - 1)/2$ sont $z_0 = e^{i\pi/3}, z_1 = e^{i\,4\pi/3}$. Ce sont les points diamétralement opposés du cercle trigonométrique dont l'un a pour coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
Les racines quatrièmes de $(i\sqrt{3} - 1)/2$ sont $z_0 = e^{i\,\pi/6}, z_1 = e^{i\,2\pi/3}, z_2 = e^{i\,7\pi/6}, z_3 = e^{i\,5\pi/3}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle trigonométrique, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Exercice 6

$l^2/8R$

Exercice 7

une fonction.

Année académique 2025-2026

MATH1009

Correction des listes d'exercices du $2^{\text{ème}}$ quadrimestre :
Chimie (B1) et Géologie (B2)

Version 22 janvier 2026

Chapitre 5

Listes d'exercices 2025 - 2026 : correction (Math1009)

Liste 1 : Rappels et calcul matriciel

I. Nombres complexes et résolution d'équations

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous.**

$$z_1 = \frac{i+1}{i-1}, \qquad z_2 = \cos(2) + i\sin(2), \qquad z_3 = \frac{(i+2)^3}{2-i}.$$

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
z_1	0	-1	i	1
z_2	$\cos(2)$	$\sin(2)$	$\cos(2) - i\sin(2)$	1
z_3	$2/5$	$11/5$	$(2-11i)/5$	$\sqrt{5}$

2. **Résoudre les équations suivantes**

$$(1)\ z^2 + 9 = 0 \qquad (2)\ z^3 = 1 \qquad (3)\ z^2 + z + 1 = 0.$$

On a (1) $S = \{-3i,\ 3i\}$ (2) $S = \{1, (-1+i\sqrt{3})/2,\ (-1-i\sqrt{3})/2\}$
(3) $S = \{(-1+i\sqrt{3})/2,\ (-1-i\sqrt{3})/2\}$

II. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ 3/i & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1/(i+1) \\ -2i & i/2 \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$ 3) $A.B=\begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B{+}C=\begin{pmatrix} 11+i & (9+19i)/2 \\ 3+3i & (-20+17i)/2 \end{pmatrix}$ 5) $B.A=\begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C=\begin{pmatrix} 4 & 3/2-i \\ 3-i & -3i/2 \\ 8+3i & (-1+6i)/2 \end{pmatrix}$ 8) $iC=\begin{pmatrix} 3i & (1+i)/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}$

9) $(iA)^*=\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij}=1$, $\forall i,j$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

   Calculer $C=AB-BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C}+C$.

   On a $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C}+C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2-2A+3\,\mathbb{1}=0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec**

   a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbb{C})$

   La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbb{C})$.

   La forme générale des matrices qui commutent avec B est du type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{C})$ si $a\neq b$. Si $a=b$ alors toute matrice de dimension 2 commute avec B car B est dans ce cas un multiple de la matrice identité.

Liste 2 : calcul matriciel (2)

I. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix} \ (a,b,c \in \mathbb{R}).$$

Le déterminant de A vaut $(8-i)/9$, celui de B vaut 1, celui de C vaut 90, celui de D vaut $-7/2$ et celui de E est nul.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est égal à $(x+1)^2$; celui de B est égal à
$(x+2i)(x-2i)$, celui de C vaut $(x+1)^2(x-3)$ et celui de D vaut $-x^2(x+2)(x-1)^2$.

II. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice inverse de C est égale à son inverse.
- La matrice inverse de D est $D^{-1} = \dfrac{1+i}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice inverse de E est $E^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -i & -i \\ i & -1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Liste 3 : calcul matriciel (3)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-1+i$ et $1+i$; ces valeurs propres sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
Les valeurs propres de la matrice C sont -4, 1 et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -2 et 5 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Comme A est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par S.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$. Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres

linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}CS = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

• Matrice D : 3 valeurs propres simple : $-4,\ 1$ et 3 ; la matrice est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -4 sont du type $c\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$; les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont du type $c_2\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$ et les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont du type $c_3\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $c_3 \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\5 & 0 & 2\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   — **on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,**
   — **s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,**
   — **s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.**
   Sachant cela,
   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**
   (b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**
   (c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

   (a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix}N_1\\P_1\\S_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/2\\1/4 & 1/2 & 1/2\\1/4 & 1/4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_0\\P_0\\S_0\end{pmatrix}$$

   et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on a 4 chances sur 10 qu'il neige, 4 chances sur 10 qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

   (a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**

   (b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

(a) S'il vient de manger des carottes, le lapin a 30 % de chance de manger de la salade dans deux repas.
(b) A longue échéance, le lapin a 40 % de chance de manger des carottes ou de la salade et 20% de chance de manger des pissenlits.

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

— **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

— **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

— **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Vrai ou faux (Justifier)**

   (a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**.**

   Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la troisième ligne de AB est le vecteur nul alors que la troisième ligne de BA a pour premier élément g.

   (b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**
   Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

   (c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**
   Vrai (cf. théorie)

   (d) **Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors** $\det A = 0$**.**
   Vrai (cf. théorie)

   (e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors** $\det(5A) = 5 \det A$**.**
   Faux : $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \det A$

   (f) **Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors** $\det B = 5 \det A$**.**
   Vrai (cf. théorie)

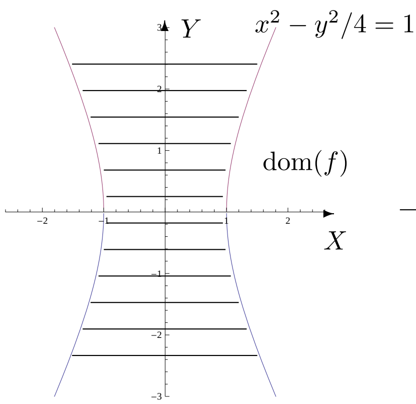
LISTE 4 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (1)

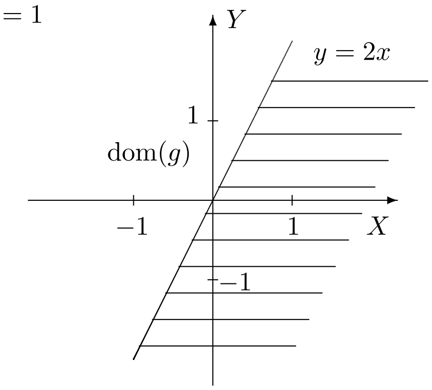
I. Définitions et représentations graphiques

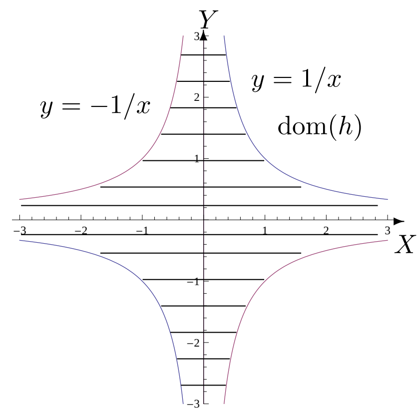
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{2x-y}, \quad h(x,y) = \arccos(xy).$$

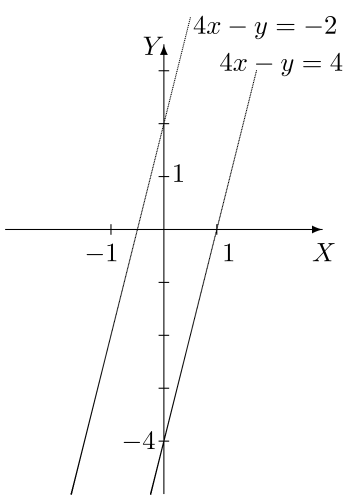
Les domaines de définition sont les suivants :
• $\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2/4 - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble.
• $\mathrm{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble.
• $\mathrm{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble.

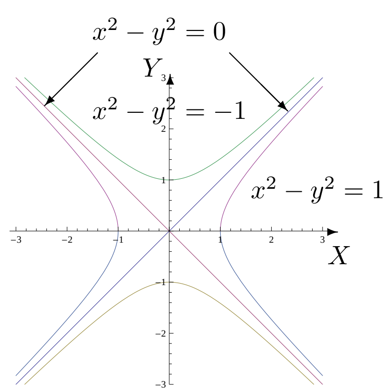


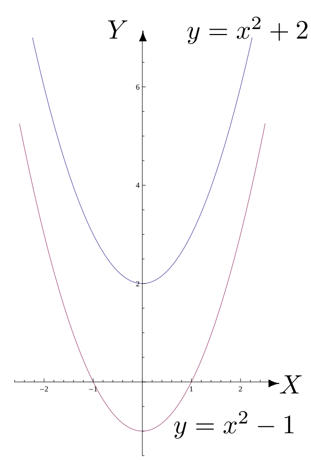




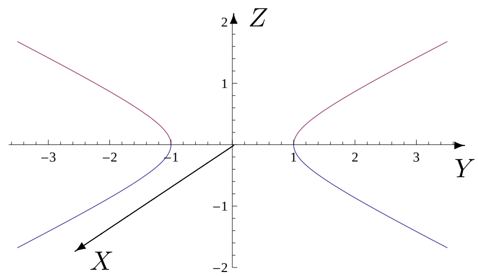
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si**
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$





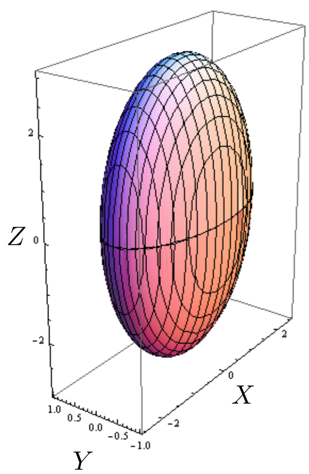


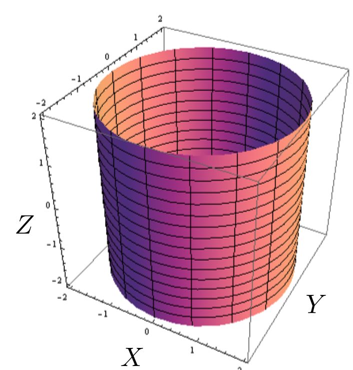
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci.**
   a) Quelle est la nature de la surface quadrique déquation cartésienne $x^2+y^2-4z^2=1$?
   b) Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2-4z^2=1$ dans le plan d'équation $z=0$ puis dans celui d'équation $x=0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ?
   a) Cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.
   b) La trace dans le plan d'équation $z=0$ est le cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1 ; celle dans le plan d'équation $x=0$ est une hyperbole d'équation cartésienne $y^2-4z^2=1$ (cf. graphique).



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1 \qquad\qquad b)x^2+y^2=4.$$



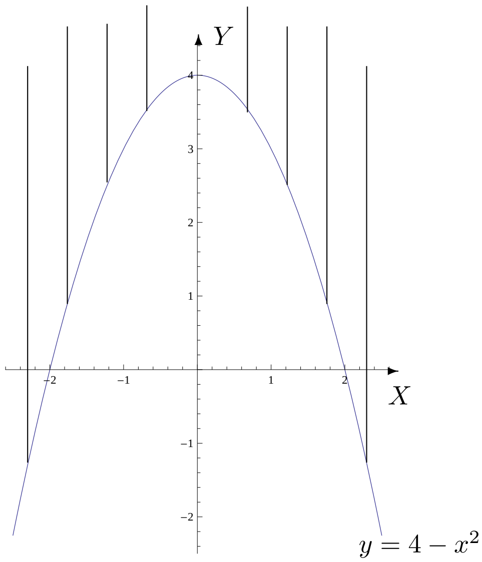


II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y)=3x^2+xy,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
   La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut -4.
2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y)=\ln(x^2-4+y), \quad g(x,y)=\cos(x^2y^2+4y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y)=x^2\,e^{-x/y}.$$

   a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 4 > 0\}$.
La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y - 4}$$

et

$$D_y f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y - 4}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x, y) = -2xy^2 \sin(x^2y^2 + 4y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x, y) = -(2x^2y + 4)\sin(x^2y^2 + 4y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des abscisses. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x, y) = \left(2x - \frac{x^2}{y}\right) e^{-x/y} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x, y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-x/y}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.**
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

   Les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on a $D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y) = 3(x^2 - 4y^2)/(x^2 + 4y^2)^2$.

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.**

   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x, y, z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

   a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

   $$(2x_1x_2 \sin(3x_3),\ x_1^2 \sin(3x_3),\ 3x_1^2x_2 \cos(3x_3)).$$

   b) La fonction g est dérivable sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

   $$\left((2x + x^2y^2\sqrt{z})e^{xy^2\sqrt{z}},\ 2x^3y\sqrt{z}\, e^{xy^2\sqrt{z}},\ \frac{x^3y^2}{2\sqrt{z}}\, e^{xy^2\sqrt{z}}\right).$$

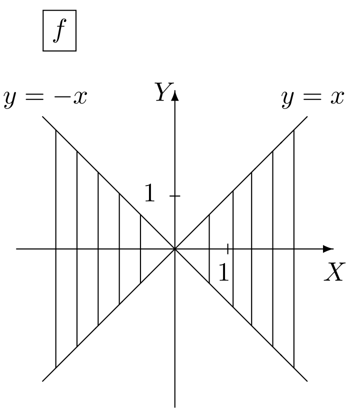
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

   $$f(x, y) = \arcsin(y/x) \qquad g(x, y) = \exp(\sqrt{x + y^2 + 1}).$$

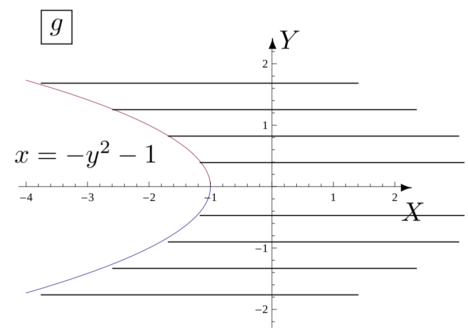
   a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
   b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x, y) + |y|D_y f(x, y)$.
   c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(1/t, t)$, le domaine de dérivabilité de

cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

a) Pour f, on a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y/x \leq 1,\ x \neq 0\}$ et
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y/x < 1,\ x \neq 0\}$.
Pour g, on a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 + 1 \geq 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 + 1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$|x| D_x f(x, y) + |y| D_y f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \geq 0 \\ -2y/\sqrt{x^2 - y^2} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f(1/t, t)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $]-1, 1[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

$$DF(t) = \frac{2t}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{2})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $DG(t) = 0$.

6. **On donne la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x, y) = f(x, y)(D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y)),\ (x, y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

On a $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et F est la fonction constante 1.

7. **On considère la fonction $f_r(x, y) = x^r e^{-y/x},\ r$ étant un réel.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Déterminer le réel r tel que $D_x f_r(x, y) = y D_y^2 f_r(x, y) + D_y f_r(x, y),\ (x, y) \in B$.

On a $A = B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ et le réel r vérifiant l'égalité donnée vaut -1.

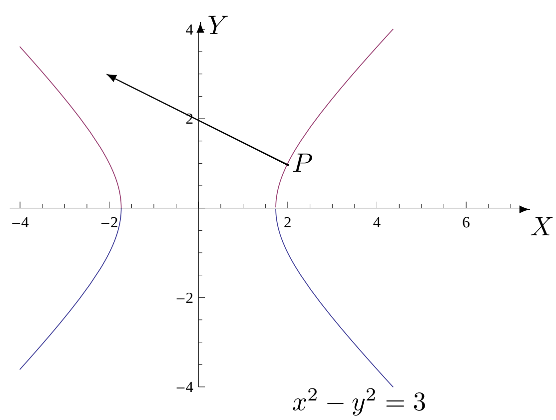
8. **On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - (a^2/b^2) D_y^2 f = 0$.**
La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

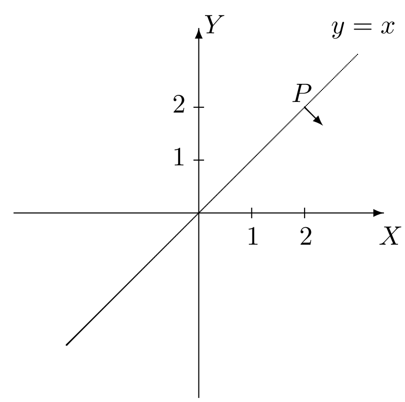
9. **L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :**
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ **et** P **a pour coordonnées** $(2,1)$
b) $T(x,y) = \arctan(y/x)$ **et** P **a pour coordonnées** $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\pi/4$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

En toute généralité, le gradient de T est un vecteur qui pointe dans la direction et le sens dans lesquels T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

$$\text{a) } (-2x, 2y) \qquad\qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.





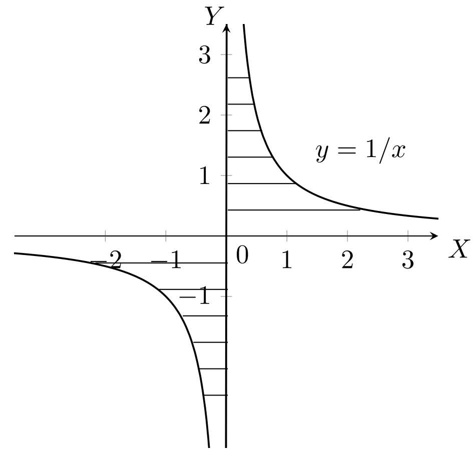
10. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y) = \text{arcos}(1 - 2xy).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) - yD_y f(x,y)$$

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$.
(b) La représentation de A est la partie hachurée du plan, les points des axes et de l'hyperbole étant exclus.
(c) $xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y) = 0$.



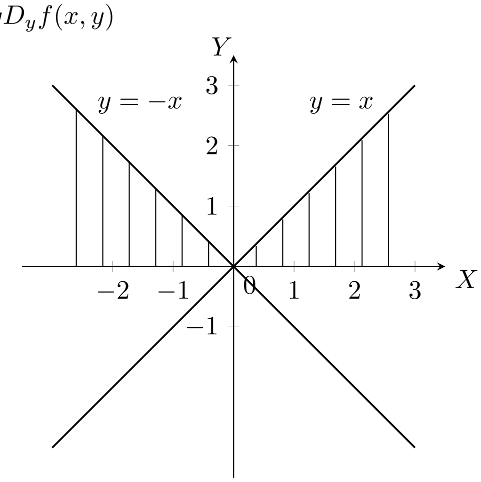
11. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y) = \ln(x^2 - y^2) - \ln(y).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_xf(x,y) + yD_yf(x,y)$$

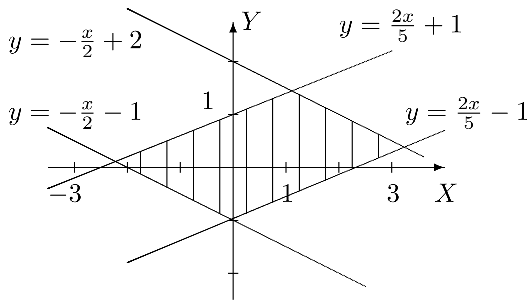
(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0,\ y > 0\}$.
(b) La représentation de A est la partie hachurée du plan, les points des droites et de l'axe des abscisses étant exclus.
(c) $xD_xf(x,y) + yD_yf(x,y) = 1$.



Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



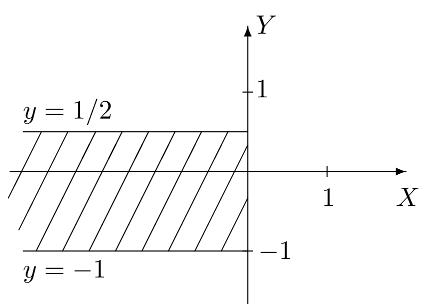
Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x+2y < 4,\ -5 < 2x-5y < 5\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xF)(x,y) = (D_1f)(x+2y, 2x-5y).1 + (D_2f)(x+2y, 2x-5y).2$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_1f)(x+2y, 2x-5y).2 + (D_2f)(x+2y, 2x-5y).(-5).$$

b) Même question pour g, fonction continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln(\pi/3), +\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in]-1, 1/2[\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y) = (D_1g)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\exp(x)$$

$$(D_yG)(x,y) = (D_2g)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\left(\frac{-1}{\arccos(y)\sqrt{1-y^2}}\right).$$

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\pi/2, \pi/6[\times]0, +\infty[\times]0, 10/9[$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), 1/\sqrt{t+1}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\pi/6, \pi/3[\times]\sqrt{2}, +\infty[\times]0, 3[$.

a) Le domaine de dérivabilité de f est $A =]-1/3, 1/4[$.
b) La dérivée de f est donnée par

$$Df(t) = (D_1g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_2g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$
$$+(D_3g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).2t.$$

c) La dérivée de f en 0 est donnée par $(Df)(0) = (D_1g)(0,1,1).2 + (D_2g)(0,1,1).(-1/2)$; elle n'est pas dérivable en $1/3$.
d) Le domaine de dérivabilité de f est vide : f n'est jamais dérivable.

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_1f)(2,7) = 6$ **et** $(D_2f)(2,7) = -8$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** 3**, que vaut** $(DF)(3)$ **?**

   On a $(DF)(3) = (D_1f)(2,7).(D_tx)(3) + (D_2f)(2,7).(D_ty)(3) = 62$.

4. **Soit** $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** $(1,0)$ **si**

$$u(1,0) = 2 \quad (D_su)(1,0) = -2 \quad (D_tu)(1,0) = 6$$
$$v(1,0) = 3 \quad (D_sv)(1,0) = 5 \quad (D_tv)(1,0) = 4$$

   et $(D_1f)(2,3) = -1$ **et** $(D_2f)(2,3) = 10$**, calculer** $(D_sF)(1,0)$ **et** $(D_tF)(1,0)$**.**

   On a $(D_sF)(1,0) = (D_1f)(2,3).(D_su)(1,0) + (D_2f)(2,3).(D_sv)(1,0) = 52$ et $(D_tF)(1,0) = (D_1f)(2,3).(D_tu)(1,0) + (D_2f)(2,3).(D_tv)(1,0) = 34$

5. **(a) Soient**

$$f \in C_1(]0,1[\times]-\infty,0[) \quad \textbf{et} \quad F(t) = f\left(\ln\left(\frac{t-1}{2}\right), t^2+t-6\right).$$

   Où la fonction F **est-elle dérivable ?**
   Quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f **?**
   (b) Même question pour

$$f \in C_1(]0,+\infty[\times]0,+\infty[) \quad \textbf{et} \quad F(x) = f(e^{-x}-1, \ln(5-x^2)).$$

   (a) Le domaine de dérivabilité de F est vide.
   (b) La fonction F est dérivable sur $]-2,0[$ et l'expression de sa dérivée est donnée par

$$DF(x) = (D_1f)(u,v) \times (-e^{-x}) + (D_2f)(u,v) \times \frac{-2x}{5-x^2}$$

   avec $(u,v) = (e^{-x}-1, \ln(5-x^2))$.

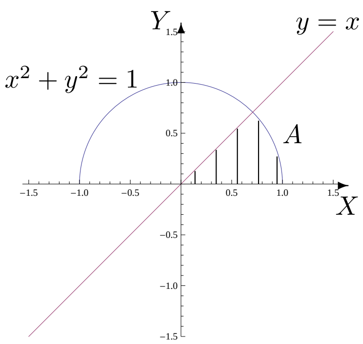
6. **On donne la fonction** $(x,y) \mapsto f(x,y)$ **définie et 2 fois continûment dérivable sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires** $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ $(r > 0$ **et** $\theta \in [0, 2\pi[)$ **et on considère** $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$**.**
   Montrer que $\quad (D_xf)^2 + (D_yf)^2 = (D_rF)^2 + (D_\theta F)^2/r^2$

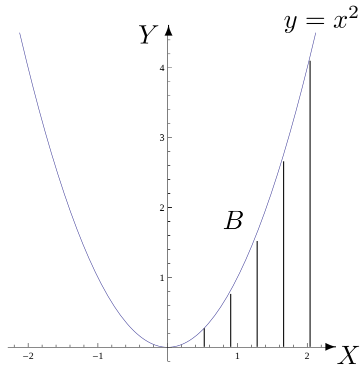
   Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

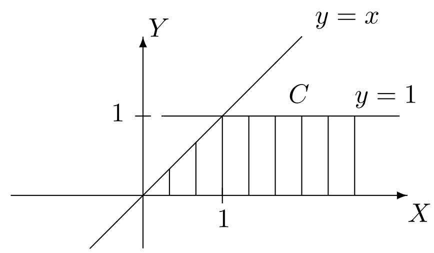
II. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\begin{array}{l}
\text{a) } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\} \\
\text{b) } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\} \\
\text{c) } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0,1]\}
\end{array}$$

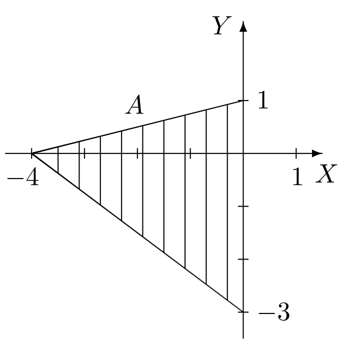


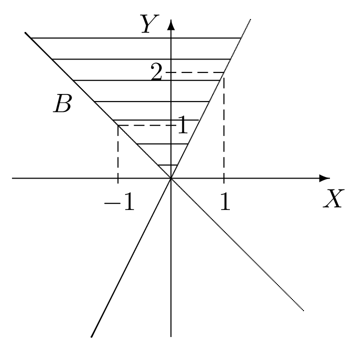


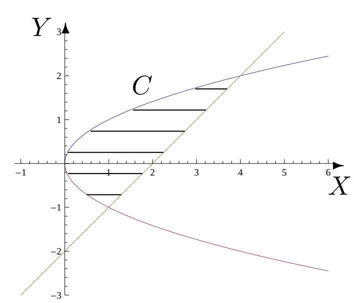


Les points des bords sont compris dans les ensembles.

2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.







Les descriptions analytiques sont les suivantes

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4,0],\ y \in [-\frac{3}{4}x - 3, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3,0],\ x \in [-\frac{4}{3}y - 4, 0]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

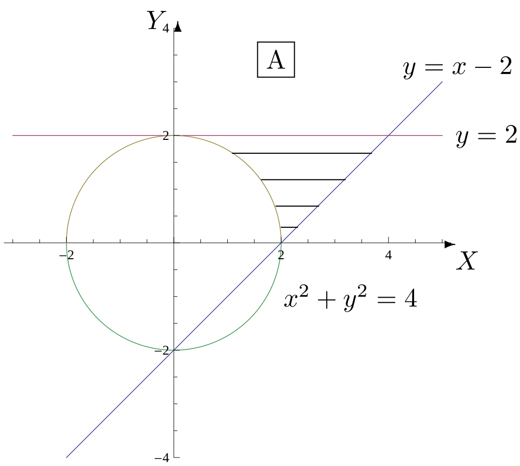
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [-y,\ \frac{y}{2}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty,0],\ y \in [-x,+\infty[\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in [2x,\ +\infty[\}$

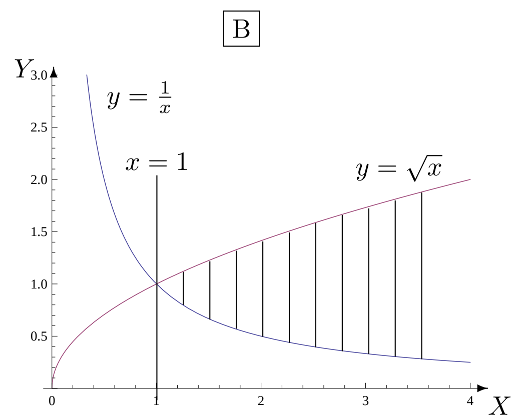
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in [y^2, y+2]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,4],\ y \in [x-2, \sqrt{x}]\}.$

3. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si**

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ x-2\leq y\leq 2,\ x^2+y^2\geq 4\}\qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1,\ 1/x\leq y\leq \sqrt{x}\}.$$

Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents.





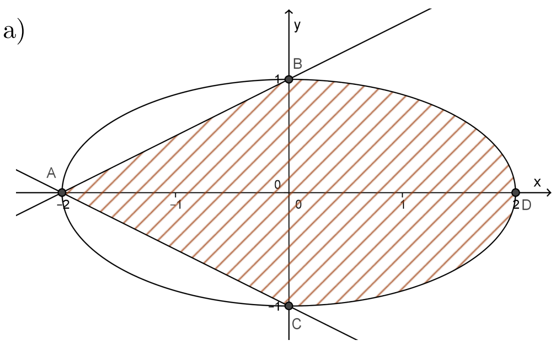
Les points des bords sont compris dans A et dans B.

Pour A :
a) $X=[0,4]$ et $Y=[0,2]$.
b) si x fixé dans $[0,2]$ alors les ordonnées varient dans $[\sqrt{4-x^2},2]$
si x fixé dans $[2,4]$ alors les ordonnées varient dans $[x-2,2]$.
si y fixé dans Y alors les abscisses varient dans $[\sqrt{4-y^2},y+2]$.
c) on a
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2],\ y\in[\sqrt{4-x^2},2]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[2,4],\ y\in[x-2,2]\}$
$\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,2],\ x\in[\sqrt{4-y^2},y+2]$.

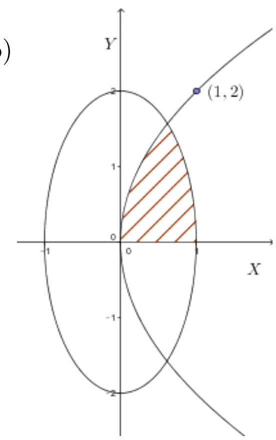
Pour B :
a) $X=[1,+\infty[$ et $Y=]0,+\infty[$.
b) si x fixé dans X alors les ordonnées varient dans $[1/x,\sqrt{x}]$.
si y fixé dans $]0,1]$ alors les abscisses varient dans $1/y,+\infty[$
si y fixé dans $[1,+\infty[$ alors les abscisses varient dans $[y^2,+\infty[$.
c) on a
$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,+\infty[,\ y\in[1/x,\sqrt{x}]\}$
$\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in]0,1],\ x\in[1/y,+\infty[\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[1,+\infty[,\ x\in[y^2,+\infty[\}$.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

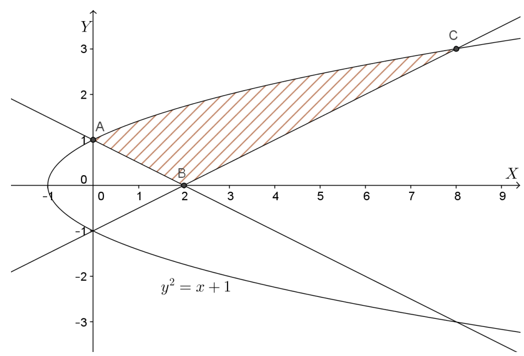
a)



b)



c)



a) Les points A, B, C et D ont respectivement pour coordonnées $(-2, 0), (0, 1), (0, -1)$ et $(2, 0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv x - 2y + 2 = 0$, $AC \equiv x + 2y + 2 = 0$, et l'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in \left[-2y - 2, 2\sqrt{1 - y^2}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in \left[2y - 2, 2\sqrt{1 - y^2}\right]\right\}$$

ou encore par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in [(-x - 2)/2, (x + 2)/2]\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in \left[-\sqrt{4 - x^2}/2, \sqrt{4 - x^2}/2\right]\right\}.$$

b) L'ellipse a pour équation $x^2 + y^2/4 = 1$ ou encore $4x^2 + y^2 = 4$. la branche de la parabole qui comprend le point de coordonnées $(1, 2)$ a pour équation $y = 2\sqrt{x}$. Le point d'intersection entre les deux courbes est le point de coordonnées $((-1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{-2 + 2\sqrt{5}})$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}\right],\ x \in \left[\frac{y^2}{4}, \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2}\right]\right\}$$

ou encore par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, (-1 + \sqrt{5})/2\right],\ y \in [0, 2\sqrt{x}]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[(-1 + \sqrt{5})/2, 1\right],\ y \in \left[0, 2\sqrt{1 - x^2}\right]\right\}.$$

c) Les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées $(0, 1), (2, 0)$ et $(8, 3)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB : x + 2y - 2 = 0$, $BC : x - 2y - 2 = 0$, et la parabole a pour équation $y^2 - 1 = x$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

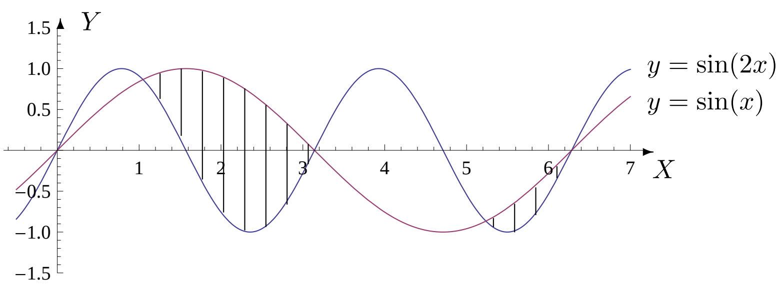
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [-2y + 2, 2y + 2]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, 3],\ x \in \left[y^2 - 1, 2y + 2\right]\right\}$$

ou encore par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in \left[\frac{-x}{2} + 1, \sqrt{x + 1}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2, 8],\ y \in \left[\frac{x}{2} - 1, \sqrt{x + 1}\right]\right\}.$$

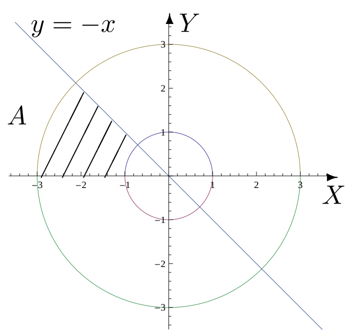
5. **On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.**

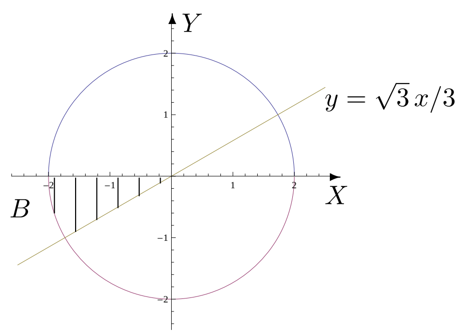
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$



Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.

6. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.**





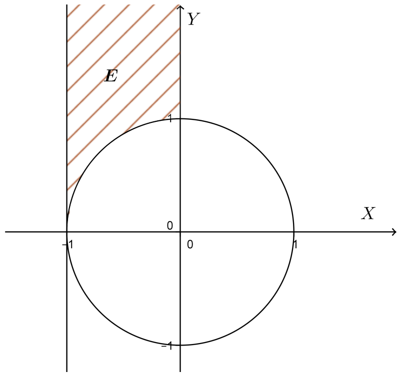
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r, \theta) : r \in [1, 3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r, \theta) : r \in]0, 2[,\ \theta \in \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\right\}.$$

7. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r, \theta) : \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ r \in \left]1, \frac{-1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

Liste 6 : révisions en vue de l'interrogation du 31 mars 2026

Liste à établir en fonction de la matière prévue pour l'interrogation

Liste 7 : révisions en vue de l'interrogation du 31 mars 2026

Liste à établir en fonction de la matière prévue pour l'interrogation

Liste 8 : fonctions de plusieurs variables (3)

I. Permutation de l'ordre d'intégration

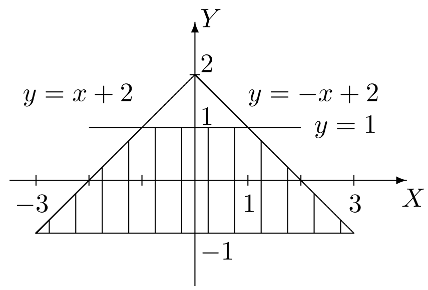
1. **Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{1}\left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3}\left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy\right)dx$$

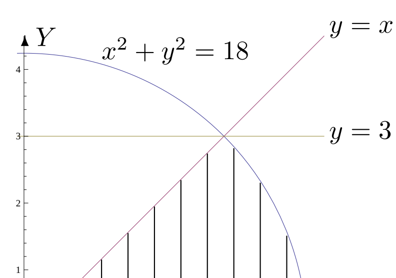
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

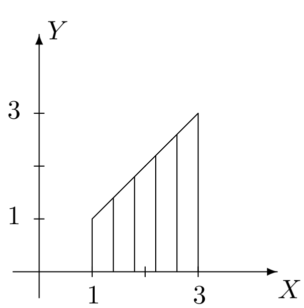
$$\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_{3}^{3\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{18-x^2}} f(x,y)\ dy\right)dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy.$$

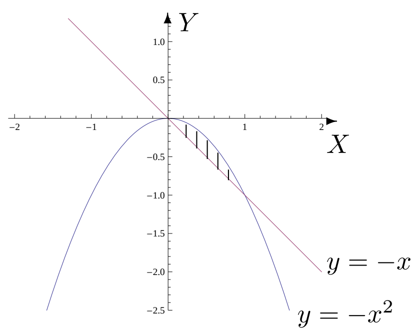


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,y)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_y^3 f(x,y)\ dx \right) dy.$$

II. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.



L'expression analytique de A est
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-x, -x^2]\}$
ou encore
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0],\ x \in [-y, \sqrt{-y}]\}$.
La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sin(1) - (\cos(1)+1)/2$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = [\pi/2, \pi] \times [-1,1]\}$

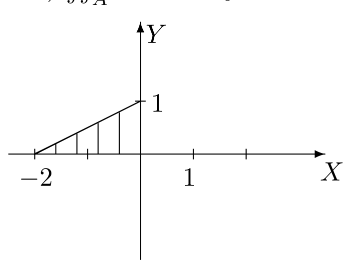
   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $512/5$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sin(1)/2$.

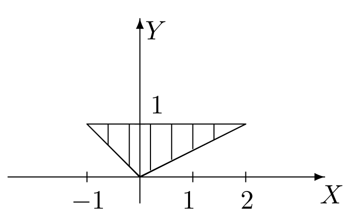
   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $(2\pi - 8)/\pi^2$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

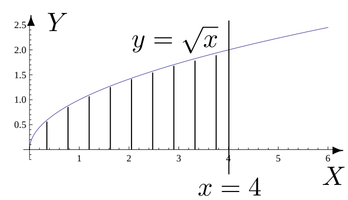
a) $\iint_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\iint_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$

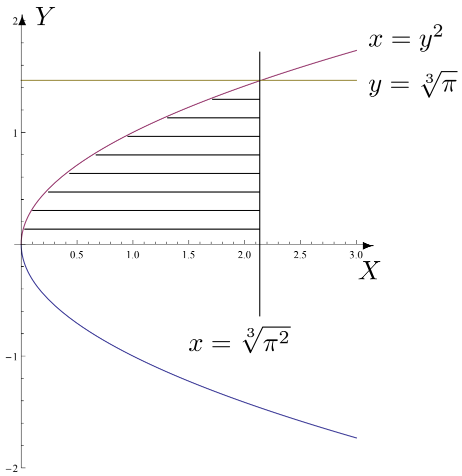


a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $(1/e - 1)^2$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $3/8$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $(\sqrt{17}-1)/2$.

4. **Soit** $I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy$**.**
   Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.



La fonction est intégrable sur cet ensemble (partie hachurée) et son intégrale vaut 0.

Liste 9 : correction de l'interrogation du 31 mars 2026

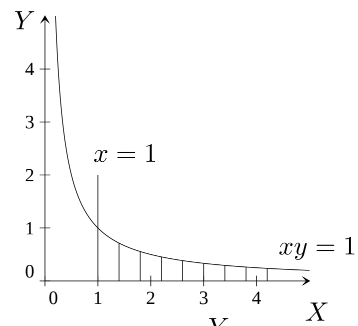
Liste 10 : fonctions de plusieurs variables (4)

I. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

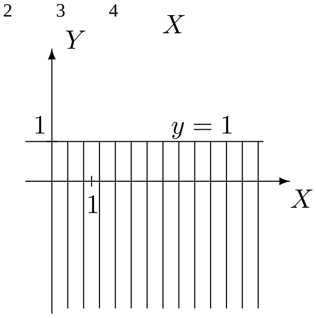
a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



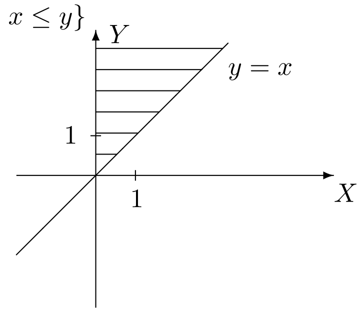
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\, dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in]-\infty, 1]\}$ et son intégrale vaut $e/3$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



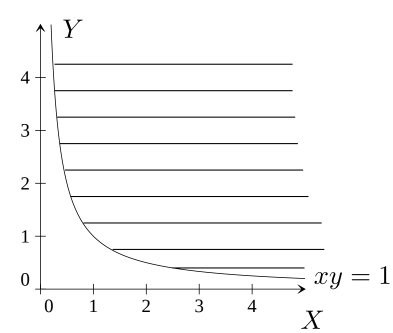
c) $\displaystyle\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $1/2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\iint_A x^3\, e^{-x^2 y}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

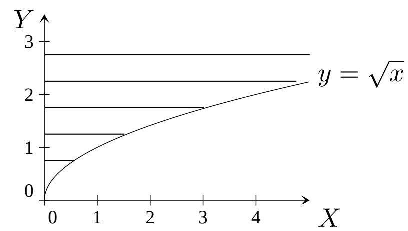
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



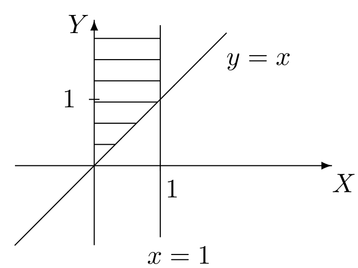
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right) dy, \quad b) \int_0^1 \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\, dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx$$

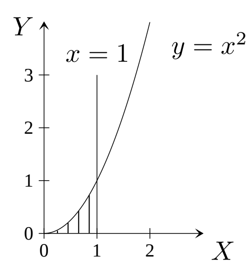
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[, \ x \in [0,y^2]\}$ et son intégrale vaut $\ln(2)/2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1], \ y \in [x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $\pi/2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1], \ y \in [0,x^2]\}$ et son intégrale vaut $2\ln(2) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x)e^{-x}\, dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

a) L'ensemble d'intégration A est donné par

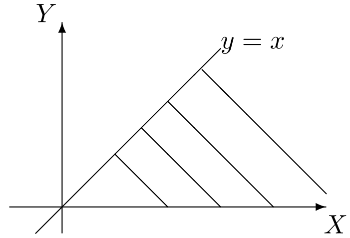
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[, \ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[, \ x \in [y,+\infty[\}$$

et est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.

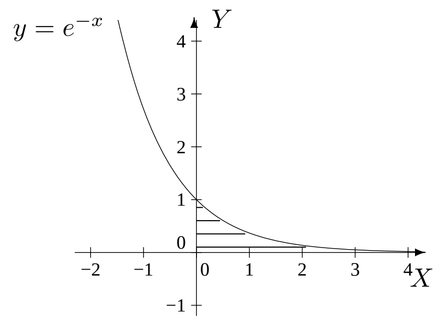
En permutant l'ordre d'intégration, on a $I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \cos(y-x)e^{-x}\, dx \right) dy.$

b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $1/2$.

c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



4. **Calculer l'intégrale de $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)**



Une description analytique de l'ensemble d'intégration est donnée par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [0, e^{-x}]\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,1],\ x \in [0, -\ln(y)]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ x \geq 0\}$$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $3/4$.

Liste 11 : fonctions de plusieurs variables (5)

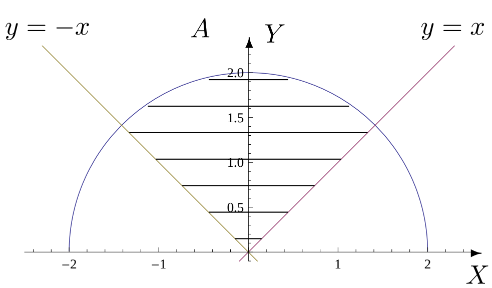
I. Intégration par changement de variables polaires

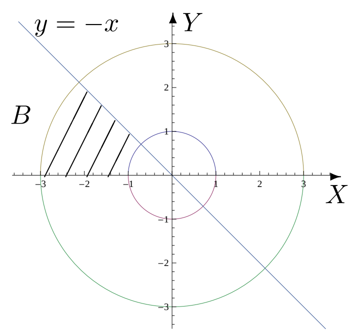
1. **Si elle existe, calculer**

   a) $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   b) $\displaystyle\iint_B xy\;dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   c) $\displaystyle\iint_C (2x+y)\;dx\,dy$ où $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \inf\{-x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.





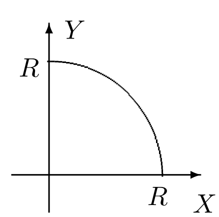
   Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $4\pi/3$, -5 et $1/3-\sqrt{2}/2$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1}\iint_A x\;dx\;dy,\quad y_A = s^{-1}\iint_A y\;dx\;dy$$

   et où s est l'aire de la surface A.
   Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

   La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi},\dfrac{3R}{2\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



II. Divers

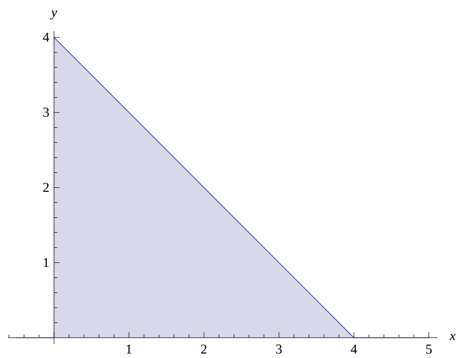
La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m=\iint_R \delta(x,y)dxdy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) **quelle est la masse de cette plaque ?**

b) **en quelles unités s'exprime la constante K ?**



La masse de la plaque est $128K/3\ kg$ et la constante K s'exprime en kg/m^4.

1. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)

Liste 12 : approximations polynomiales

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations. Pour f_5,**
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

$f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$
$f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$
$f_3(x) = 1/(1-2x),\ x_0 = 0, n = 0,1,2$
$f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0 \text{ (resp. } x_0 = 1), n = 0,1,2$
$f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$
$f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+3x$	$1+3x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1+\dfrac{9x}{2}$	$1+\dfrac{9x}{2}-\dfrac{81x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$
f_3	1	$1+2x$	$1+2x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0=0)$	0	x	$x,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0=1)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{4},\ x \in \mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)\dfrac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1+3x+4x^2+3x^3,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Pour f_5, si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_0, u_1, u_2 compris entre 0 et x tels que

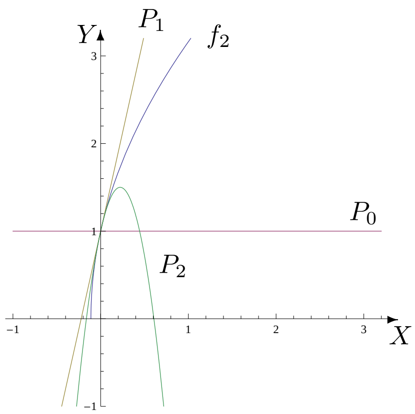
$$R_0(x) = -\sin(2u_0)x, \quad R_1(x) = -2\cos(2u_1).\frac{x^2}{2!} = -\cos(2u_1)x^2$$

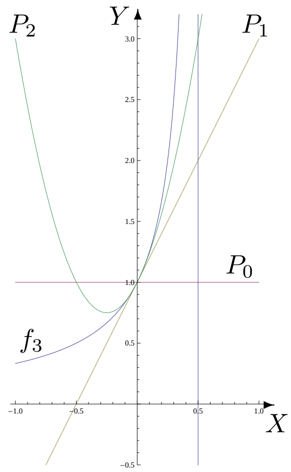
et

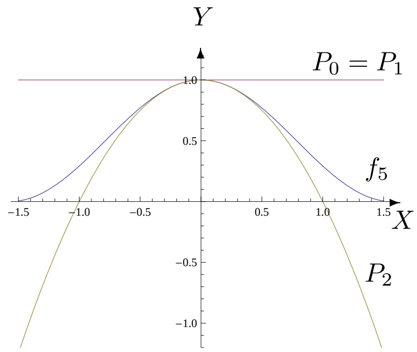
$$R_2(x) = 4\sin(2u_2).\frac{x^3}{3!} = \frac{2\sin(2u_2)\,x^3}{3}.$$

b) Lorsque x est au voisinage de 0, $R_0(x)$ et $R_1(x)$ sont négatifs tandis que $R_2(x)$ est positif. Dès lors, le graphique de la fonction est situé en dessous de celui de P_0 et de celui de P_1 mais au-dessus de celui de P_2.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

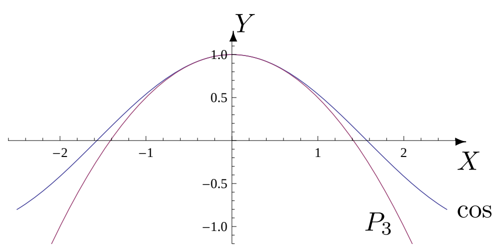






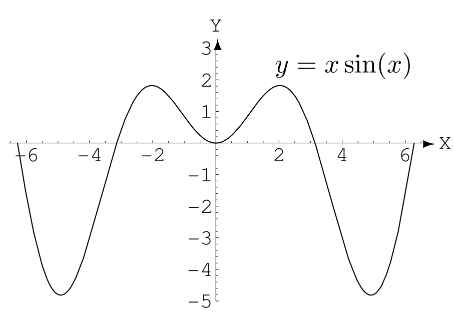
2. a) **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction $\cos$ et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P_3(x) = 1 - x^2/2,\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \cos(u)\, x^4/4!,\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq x^4/24$.



b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion : $|\sin(x)| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$**)**

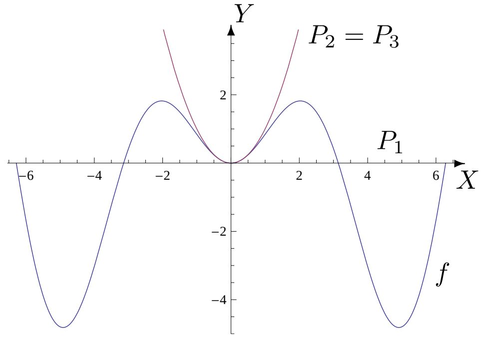


Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Au voisinage de zéro, le graphique de f est

1) au-dessus de celui de P_1

2) en dessous de celui de $P_2 = P_3$



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**
Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = e^u\, x^{n+1}/(n+1)!,\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq 3\, x^{n+1}/(n+1)!$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

4. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre** $0,1,2,3$ **en** 0 **des fonctions données par** [2]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0,1,2,3$ en 0 sont respectivement

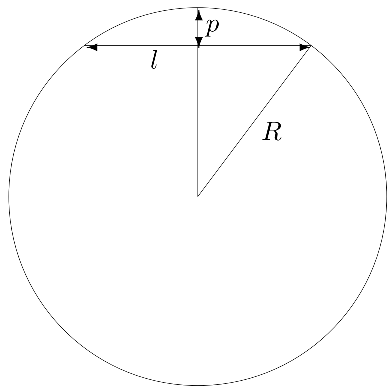
$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = -2x,\ P_2(x) = -2x,\ P_3(x) = -2x - \frac{2x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0,1,2,3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = -2,\ P_1(x) = -2 - x,\ P_2(x) = -2 - x - 5x^2,\ P_3(x) = -2 - x - 5x^2 - 7x^3,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ pour g_1 et décomposer en fractions simples pour g_2.

5. **Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.**



Une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

Liste 13 : Développements en série de puissances

Développements en série de puissances

1. **Si possible, développer les fonctions suivantes (données explicitement) en série de puissances de x au voisinage de 0**

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad f_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$

On a les développements suivants

$$f_1(x) = 1 - 2\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m x^m = -1 - 2\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m x^m \quad \text{pour} \quad x \in]-1,1[$$

et

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}(1+2^m)\, x^m \quad \text{pour} \quad x \in]-1/2, 1/2[.$$

2. **Déterminer le développement en série de puissances de x des fonctions suivantes**

$$f_1(x) = x^3\exp(-x),\ x \in \mathbb{R} \qquad f_2(x) = \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}\ ^{3} \qquad f_4(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_5(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R} \qquad f_6(x) = \ln(1+x),\ x \in]-1,1[$$

$$f_7(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x \in]-1,1[\qquad f_8(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$$

Fonction	Développement en série de puissances
f_1	$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m \frac{x^{m+3}}{m!},\quad x \in \mathbb{R}$
f_2	$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!},\quad x \in \mathbb{R}$
f_3	$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},\quad x \in \mathbb{R}$
f_4	$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m x^{2m}/(2m)!,\quad x \in \mathbb{R}$

Fonction	Développement en série de puissances
f_5	$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m x^{2m+1}/(2m+1)!,\quad x \in \mathbb{R}$
f_6	$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1},\ x \in]-1,1[$
f_7	$2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1},\ x \in]-1,1[$
f_8	$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1},\ x \in]-1,1]$

3. Les fonctions ch et sh sont appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques

Liste 14 : Mathématiques appliquées

Fonctions de plusieurs variables

1. **En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [4]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.**
Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de 3 paramètres : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules N du système.*
Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction S, dépendant de U, V et N, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique*. Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par

$$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$

où
- **T est la température du système ;**
- **p est la pression du système ;**
- **μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [5]) ;**

et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par

$$S = k_B N \ln\left(\frac{V - Nv_0}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2}\ln\left(\frac{U + K_i N^2/V}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2}\ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2}k_B N$$

où
- **k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,**
- **v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,**
- **$K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,**
- **m est la masse d'une particule,**
- **$\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,**

déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

Solution. La première équation d'état conduit à

$$D_U S = \frac{3k_B N}{2(U + K_i N^2/V)} = \frac{1}{T}$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$U = \frac{3}{2}k_B NT - \frac{K_i N^2}{V}.$$

4. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

5. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

La seconde équation d'état conduit à

$$D_V S = \frac{k_B N}{V - Nv_0} + \frac{3k_B N}{2} \times \frac{-K_i N^2/V^2}{U + K_i N^2/V} = \frac{p}{T}$$

2. **La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation[6] :**

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

Solution. La pression diminue à la vitesse de $0,04155\ kPa/s$.

3. **La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :**

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que

$$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$

Posons

$$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$

(a) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;**
(b) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;**
(c) **Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé "point-selle" ;**
(d) **Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.**

En se basant sur ce test,

a) **rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction**

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Solution. L'origine $(0,0)$ est un point-selle. De plus, $f(1,1) = -1$ et $f(-1,-1) = -1$ sont des minima locaux de f.

b) **déterminer la distance[7] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.**

Solution. Le point de coordonnée $(11/6, 5/3, -7/6)$ correspond à un minimum local (et même global car en géométrie, on prouve que la distance d'un point à un plan est unique) de la

6. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).
7. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

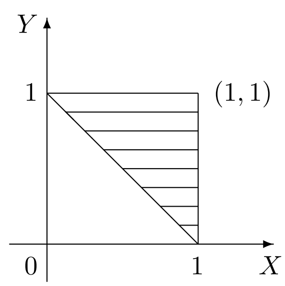
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.

distance, qui vaut en ce point $5\sqrt{6}/6$. La distance du point donné au plan donné vaut donc $5\sqrt{6}/6$.

4. **Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x, y)$ en un point(x, y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par**

$$Q = \iint_R \rho(x, y)\, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x, y) est donnée par $\rho(x, y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.



Solution. La charge totale présente sur le domaine triangulaire donné est de $(5/12)\ C$.

5. **En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.**
Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut

$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$

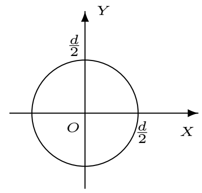
Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par

$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$

On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
a) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre** ;
b) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.**

Solution. a) Considérons le repère orthonormé dont l'origine O est le centre du disque donné, et dont les axes coïncident avec deux droites perpendiculaires passant par O. On obtient dès lors la configuration suivante :



Dans ces conditions, le disque D est décrit par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées polaires à l'ensemble

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid r \in \left]0, \frac{d}{2}\right], \; \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

auquel on ajoute le centre du disque.
Ainsi, le moment d'inertie du disque D par rapport à son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'origine du repère choisi et est donné par

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} r^2 \rho\, r\, drd\theta = \frac{\pi \rho d^4}{2^5}.$$

b) Vu le choix du repère, le moment d'inertie du disque D par rapport à une droite passant par son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe X ou encore par rapport à l'axe Y. On en conclut donc que tous ces moments d'inertie du disque sont égaux, c'est-à-dire $I_X = I_Y = I_{d'}$ quelle que soit la droite d' passant par O. Par conséquent, comme

$$I_O = I_X + I_Y = 2I_{d'},$$

il s'ensuit que

$$I_{d'} = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi \rho d^4}{2^6}.$$

6. **Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par**

$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \qquad \left(\textbf{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$

De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx \right) dy = 1,$$

auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \textbf{si} \quad 0 \le y \le x \le 10 \\ 0 \quad \textbf{sinon} \end{cases}.$$

(a) **Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.**

(b) **Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.**

Solution. (a) Pour que la fonction donnée soit une fonction de densité, la constante C doit valoir 3/2000.

(b) La probabilité que la durée de vie d'une batterie de cette fabrique soit au maximum de 7 ans et au minimum de 2 ans est de $19/80 = 0,2375$, c'est-à-dire proche de 24%

7. **Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.**

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Solution. Si l'on note X (resp. Y) le temps d'attente pour obtenir un ticket (resp. une boisson fraîche), il vient que $\mathbb{P}[X+Y<20] = 1 + 1/e^4 - 2/e^2 \approx 0,7476$. Par conséquent, environ 75% des spectateurs attendent moins de 20 minutes avant de s'asseoir.

Calcul matriciel

1. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\begin{cases} Dx(t) &= -4x(t) - 3y(t) + 5t \\ Dy(t) &= -2x(t) - 5y(t) + 5e^t \end{cases}.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

Solution. Le système donné s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{:=P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}}_{:=B(t)}. \qquad (*)$$

Tentons de diagonaliser la matrice A. On a

$$\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda+2)(\lambda+7)$$

et donc les valeurs propres de A sont -2 (simple) et -7 (simple), ce qui entraîne que A est diagonalisable. Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -2 et -7. Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

il vient que

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix},$$

et, en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que

$$\begin{aligned} & S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix} = S^{-1}A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1}AS \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}. \qquad (**) \end{aligned}$$

Or, $\det(S) = -5$ et l'inverse de S est donnée par

$$S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'équation $(**)$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}.$$

ce qui équivaut encore au système

$$\begin{cases} DX(t) & = & -2X(t) - t + e^t \\ DY(t) & = & -7Y(t) + 2t + 3\,e^t \end{cases}.$$

Les équations différentielles sont alors *découplées* et peuvent être résolues séparément. Les solutions de ces deux dernières EDLCC sont les fonctions

$$X(t) = C_1 e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4},\ t \in \mathbb{R}$$

et

$$Y(t) = C_2 e^{-7t} + \frac{3}{8} e^t + \frac{2}{7} t - \frac{2}{49},\ t \in \mathbb{R}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Enfin, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Y(t)$$

ou encore

$$\begin{cases} x(t) = -3C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^{-7t} - \dfrac{5}{8}\,e^t + \dfrac{25}{14} t - \dfrac{155}{196},\ t \in \mathbb{R} \\ y(t) = 2C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^{-7t} + \dfrac{25}{24}\,e^t - \dfrac{5}{7} t + \dfrac{45}{98},\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$.

2. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\begin{cases} Dx(t) & = & x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) & = & -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

Solution. Le système donné se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \\ Dz(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)}. \qquad (*)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont 0 (valeur propre double) et 6 (valeur propre simple). Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A, linéairement indépendants, associés à 0, ce qui entraîne que la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède au moins 3 vecteurs propres linéairement indépendants. De plus, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre 6.
Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{lll} DX(t) & = & 0 \\ DY(t) & = & 0 \\ DZ(t) & = & 6Z(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} X(t) & = & C_1 \\ Y(t) & = & C_2 \\ Z(t) & = & C_3\, e^{6t} \end{array} \right. ,$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$. Dès lors, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}, \quad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 + 2C_2 + C_3\, e^{6t} \\ y(t) = -C_2 + 2C_3\, e^{6t} \\ z(t) = C_1 - C_3\, e^{6t} \end{array} \right. .$$

3. **Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :**

   - **étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.**

   Déterminer

   a) la matrice de transition du système ;

   Solution. Notons respectivement I_0, M_0 et S_0 les probabilités qu'un individu soit immunisé, malade, non malade et non immunisé un jour donné. Le mois suivant, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} I_1 & = & 0,9\,I_0 + 0,4\,S_0 + 0\,M_0 \\ S_1 & = & 0,1\,I_0 + 0,5\,S_0 + 0,8\,M_0 \\ M_1 & = & 0\,I_0 + 0,1\,S_0 + 0,2\,M_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

   b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;

   Solution. Si un individu est immunisé un jour donné, la probabilité qu'il soit immunisé deux mois plus tard est de 85%.

   c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

   Solution. A long terme, la probabilité qu'un individu soit immunisé est donnée par $32/41$, c'est-à-dire environ 78%.

4. **Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :**

   - **étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;**
   - **étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;**
   - **étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;**
   - **si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.**

   Déterminer la matrice de transition du système.

   Solution. Notons respectivement S_0, H_0, B_0 et D_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail et disparaisse à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_1 & = & 3\,S_0/5 + H_0/10 + 3\,B_0/4 + 0\,D_0 \\ H_1 & = & 3\,S_0/10 + 2\,H_0/5 + 0\,B_0 + 0\,D_0 \\ B_1 & = & 0\,S_0 + H_0/2 + B_0/5 + 0\,D_0 \\ D_1 & = & S_0/10 + 0\,H_0 + B_0/20 + 1\,D_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ H_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & 1/10 & 3/4 & 0 \\ 3/10 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/5 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/20 & 1 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} S_0 \\ H_0 \\ B_0 \\ D_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

5. **La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.**
Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1**, B correspond à** 2, $\ldots$ **, Z correspond à** 26**. En outre, on assigne le nombre** 27 **à un espace. Ainsi, le message devient :**

S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R**
19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18.**

Puisqu'on emploie une matrice 2×2**, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs**[8] 1×2 **:**

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C**, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par** C**, ce qui nous donne :**

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

8. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18**
S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R.**

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48$**.**
L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Solution. La matrice de décodage est donnée par l'inverse de la matrice de codage, c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le message est le suivant :

22	9	12	1	9	14	27	3	21	18	9	5	21	24	27
V	I	L	A	I	N	*	C	U	R	I	E	U	X	*.

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ \mathbf{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

- **Sachant que th** : $x \mapsto (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$**, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.**
- **Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?**

Solution. - La fonction th : $x \mapsto (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est

$$D\,\mathrm{th}(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Comme $\mathrm{th}(0) = 0$ et $D\,\mathrm{th}(0) = 1$, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction est le polynôme $P(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 5$ km $= 5000$ m et $h = 2$ m, alors la valeur de $2\pi h/\lambda$ est proche de 0 et, en utilisant l'approximation polynomiale ci-dessus, on a

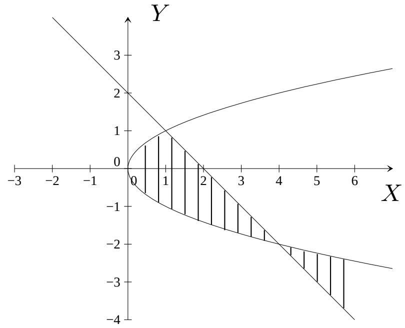
$$v^2 \approx \frac{g\lambda}{2\pi} \times \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

Ainsi, la vitesse de la vague du tsunami lors de son arrivée près des côtes était $\sqrt{2\,.\,9,81} = 4,429$ m/s.

Liste 15 : Révisions en vue de l'examen

I. Description d'ensemble

Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant (les courbes représentées sont une droite et une parabole) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.



Si on commence par l'ensemble de variation des ordonnées, on a

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\,]-\infty,-2],\ x\in[2-y,y^2]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-2,1],\ x\in[y^2,2-y]\}.$$

Si on commence par l'ensemble de variation des abscisses, on a

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ y\in[-\sqrt{x},\sqrt{x}]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,4],\ y\in[-\sqrt{x},2-x]\}$$

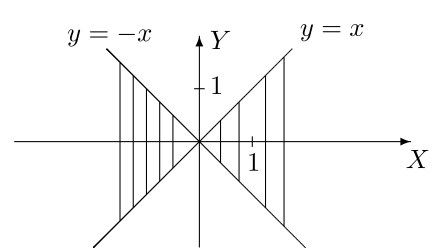
$$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[4,+\infty[,\ y\in[2-x,-\sqrt{x}]\}.$$

II. Fonctions de plusieurs variables

1. **On donne la fonction** $f:(x,y)\mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

   Solution. Les 2 domaines sont égaux à $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y,\ \dfrac{x+y}{x-y}>0\right\}$



   Les points des droites sont exclus de l'ensemble.

   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2,1)$**.**

Solution. Les dérivées partielles de la fonction sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y^2} \qquad\qquad D_y f(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2}$$

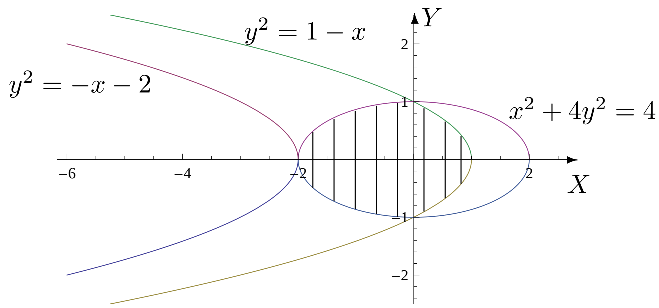
et, comme le point de coordonnées $(-2,1)$ appartient au domaine de dérivabilité, on a $D_x f(-2,1) = \frac{-1}{3}$ et $D_y f(-2,1) = \frac{-2}{3}$.

2. **Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-2,1[\times]-4,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+y^2, x^2+4y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**

Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x+y^2 < \ 1,\ -4 < x^2+4y^2 < 4\}.$$

Il est représenté par l'ensemble des points hachurés ci-dessous, les points des courbres étant exclus de l'ensemble.



Les dérivées partielles de F sont données par

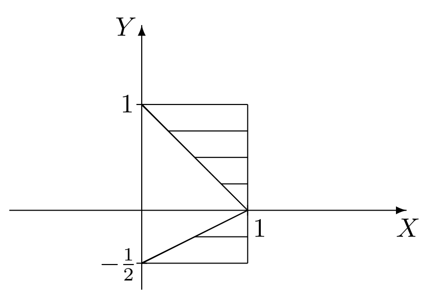
$$(D_xF)(x,y) = (D_1f)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 1 + (D_2f)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2x$$
$$(D_yF)(x,y) = (D_1f)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2y + (D_2f)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 8y.$$

3. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes**

a) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x \sin(y^5)\, dy \right) dx$

Solution. On a $\quad I = \dfrac{1}{10}(1-\cos(32))$

b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ **si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous**



Solution. On a $\quad I = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2e} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}.$

c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\, dx\, dy$ **si** $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$

Solution. On a $I = \dfrac{\pi}{6}$

d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2}\, dy\right) dx$

Solution. On a $I = \dfrac{1}{5}\left(\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

III. Calcul matriciel

1. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution. Comme $\det A = 3 \neq 0$, la matrice inverse de A existe et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$ si $\mathbb{1}$ est la matrice identité de dimension 3.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 5 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des complexes non simultanément nuls. Dès lors, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple -1 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, on a, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices données sont correctes puisque

$$AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.**
- Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
- S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
- Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
(i) Déterminer la matrice de transition.

Solution. Soient B_0, J_0 et N_0 respectivement le type de sport (basket, jogging, natation) choisi pour une semaine fixée au départ et B_1, J_1 et N_1 respectivement le type de sport choisi la semaine suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ J_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ J_0 \\ N_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.

Solution. Puisque T est une matrice régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Ce vecteur est

$$\begin{pmatrix} 12/41 \\ 14/41 \\ 15/41 \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'un étudiant fasse du jogging à long terme est de $14/41$.

IV. Approximations polynomiales

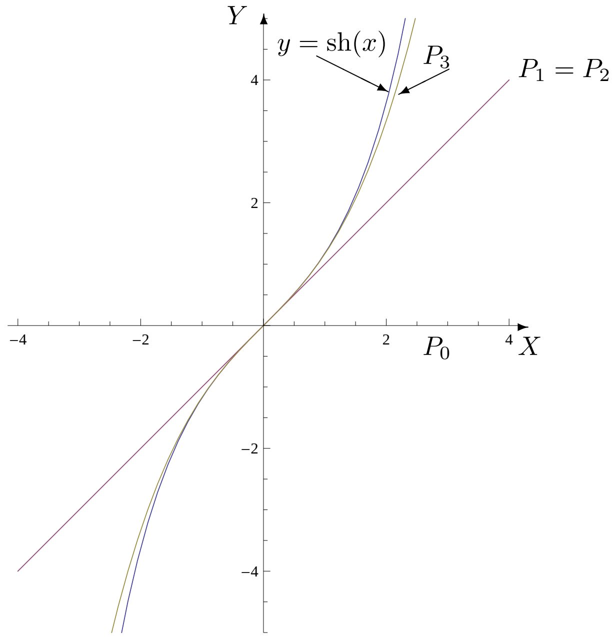
Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0, 1, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Solution. Si on note $P_n(x)$ l'approximation à l'ordre n en 0, puisque f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = P_2(x) = x \quad \text{et } P_3(x) = x + \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$



V. Développement en série de puissances

Déterminer le développement en série de puissances de x la fonction $f : x \mapsto 1/(1+x^2)$.

Le développement en série de puissances de f est donné par

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^{2m},\ x \in]-1,1[.$$

Table des matières